OCT 2 3 1


# Physikalische Zeitschrift

Begründet von E. Riecke und H. Th. Simon

Herausgeber:
Professor Dr. **M. Born** und
Professor Dr. **P. Debye**

Schriftleiter:
Dr. **Erich Hückel** in Göttingen

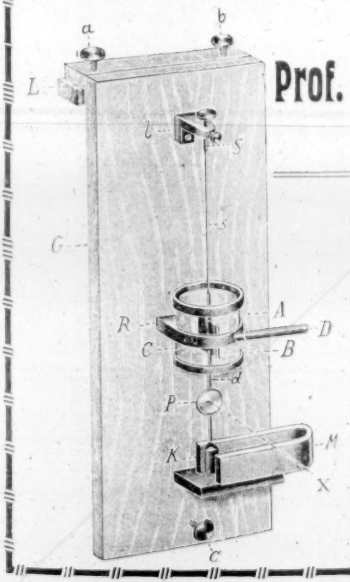
Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von zwei bis vier Bogen zum Preise von jährlich 300 Mark, bei unmittelbarer Zustellung unter Kreuzband 450 Mark, im Ausland je nach dem Valutastande. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung, die Post sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Petitzeile mit 9.— Mk., Beilagen nach Vereinbarung berechnet; bei Wiederholungen tritt Ermäßigung ein.

**Alle Manuskriptsendungen und darauf bezügliche Zuschriften sind zu richten entweder an die Herausgeber: Professor Dr. M. Born, Göttingen, Planckstraße 21, und Professor Dr. P. Debye, Zürich, Physikgebäude, Gloriastr. 35 oder an die Schriftleitung: Dr. Erich Hückel, Göttingen, Bunsenstraße 9, Physikalisches Institut der Universität, alle Büchersendungen und Anzeigenaufträge an den**

Verlag von **S. Hirzel** in Leipzig, Königstraße 2.

No. 18. 15. September 1922. No. 622. 23. Jahrgang.






Phys.-mech. Institut von

**Prof. Dr. M. Th. Edelmann & Sohn,**

München.

## Luftdruck-Mikrometer.

Empfindlichkeit $10^{-8}$ Atm.

Katalog 30 erschienen und ebenso wie Spezialliste No. 29 über Saitengalvanometer und Registrierapparate, Spezialliste No. 31 über einfache Präzisionsschulapparate gratis und franko.



**Mit einer Beilage von S. Hirzel in Leipzig, betreffend: P. Lenard, Über Äther und Uräther. Zweite vermehrte Auflage.**

## Inhaltsverzeichnis:

(B. = Besprechungen.)


| | Seite |
|---|---|
| Achsenrotation: Die — der Planeten, v. H. Troeger-Wohlau | 362 |
| **Borowik, St.**, Der Lichtbogen als Gleichrichter | 362 |
| Elektronenladung: Die Bestimmung der — aus dem Schroteffekt an Glühkathodenröhren, v. R. Fürth | 354 |
| **Fürth, R.**, Die Bestimmung der Elektronenladung aus dem Schroteffekt an Glühkathodenröhren | 354 |
| Gleichrichter: Der Lichtbogen als —, v. St. Borowik | 362 |
| Glühkathodenröhren: Die Bestimmung der Elektronenladung aus dem Schroteffekt an Glühkathodenröhren, v. R. Fürth | 354 |
| **Heisenberg, W.**, Die absoluten Dimensionen der Kármánschen Wirbelbewegung | 363 |
| Hydrodynamik: Neue Grundlagen der technischen —, v. L. W. Weil. (B.) | 376 |
| Kármansche Wirbelbewegung: Die absoluten Dimensionen der —, v. W. Heisenberg | 363 |
| **Kohlrausch, K. W. F.**, Franz Streintz † | 353 |
| Kreisförmige Platten: Die Verbiegungen in einzelnen Punkten unterstützter —, v. St. Nádai | 366 |
| Lichtbogen: Der — als Gleichrichter, v. St. Borowik | 362 |
| **Nádai, A.**, Die Verbiegungen in einzelnen Punkten unterstützter kreisförmiger Platten | 366 |
| Planeten: Die Achsenrotation der —, v. H. Troeger-Wohlau | 362 |
| Platten: Die Verbiegungen in einzelnen Punkten unterstützter kreisförmiger —, v. A. Nádai | 366 |
| Schroteffekt: Die Bestimmung der Elektronenladung aus dem — an Glühkathodenröhren, v. R. Fürth | 354 |
| Streintz, Franz †, v. K. W. F. Kohlrausch | 353 |
| **Troeger-Wohlau, H.**, Die Achsenrotation der Planeten | 362 |
| Verbiegungen: Die — in einzelnen Punkten unterstützter kreisförmiger Platten, v. A. Nádai | 366 |
| **Weil, L. W.**, Neue Grundlagen der technischen Hydrodynamik. (B.) | 376 |
| Wirbelbewegung: Die absoluten Dimensionen der Kármánschen —, v. W. Heisenberg | 363 |



Verlag von **Carl Fromme G. m. b. H., Leipzig u. Wien.**

**Erklärung der Gravitation, der Molekularkräfte, des Lichtes, der magnetischen und elektrischen Erscheinungen auf rein mechanischem atomistischem Wege**

von

Prof. Dr. **Johann Sahulka**

Preis M. 40.—.

Zu beziehen durch alle Buchhandlungen.

**Winkelmann, Handbuch der Physik und andere physikal. Werke u. Zeitschriften**

kauft zu guten Preisen

**Polytechnische Buchhandlung A. Seydel,**

**Berlin SW 11,** Königgrätzer Str. 31.

**Neuste Konstruktion!**

*Kugelepiskop. D.R.P. 250314.*

**Franz Schmidt & Haensch**

**Berlin S. 42,** Prinzessinnenstraße 16

**Werkstätten für Präzisions-Mechanik und Optik.**

**Neue optische Spezialinstrumente eigener Konstruktion, Polarisations-, Spektral-, Projektionsapparate, Episkope u. a.**

Preislisten kostenlos.

**Einbanddecken** zur Physikalischen Zeitschrift 1921 sind vorrätig und können zum Preise von M. 30.— durch jede Buchhandlung oder vom Verlag S. Hirzel in Leipzig, Königstr. 2 bezogen werden.

# PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 18. 15. September 1922. 23. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 20 am 24. September 1922.


INHALT:


K. W. F. Kohlrausch, Franz Streintz †. S. 353.

**Originalmitteilungen:**

R. Fürth, Die Bestimmung der Elektronenladung aus dem Schrotteffekt an Glühkathodenröhren. S. 354.

St. Borowik, Der Lichtbogen als Gleichrichter. S. 362.

H. Troeger-Wohlau, Die Achsenrotation der Planeten. S. 362.

W. Heisenberg, Die absoluten Dimensionen der Kármánschen Wirbelbewegung. S. 363.

A. Nádai, Die Verbiegungen in einzelnen Punkten unterstützter kreisförmiger Platten. S. 366.

**Besprechungen:**

L. W. Weil, Neue Grundlagen der technischen Hydrodynamik. S. 376.

**Personalien.** S. 376.

**Gesuche.** S. 376.


## Franz Streintz †.

Franz Streintz wurde im Jahre 1855 geboren und verbrachte seine erste Studienzeit in Graz, wo er an der Universität den Dr. phil. erwarb. Daran schloß sich ein einsemestriger Aufenthalt in Berlin bei Helmholtz (1879), wonach er für kurze Zeit in Dresden Assistent bei Töpler wurde. Im Herbst 1881 habilitierte er sich für Physik an der Universität in Graz und erwarb ebenda bald darauf die venia legendi an der Technischen Hochschule, der Stätte seines Lebenswirkens. Ein Semester (1889) verbrachte er noch bei W. Siemens, in dessen Charlottenburger Prüfstation er tätig war, und 3 Semester (1899/1901) in Göttingen, wo er bei Nernst zum erstenmal über die Leitfähigkeit gepreßter Pulver arbeitete, ein Thema, das ihn noch viele spätere Jahre beschäftigte. In Göttingen habilitierte er sich für physikalische Chemie und hat dort auch durch zwei Semester gelesen. Von den Unterbrechungen Charlottenburg und Göttingen abgesehen, lebte er ständig in Graz, wo ihn die Universität durch die Verleihung des Titels eines a. o. Professors, bald darauf die Technik in Anerkennung seiner Forschungs- und Lehrtätigkeit in gleicher Weise auszeichnete, und wo er im Jahre 1906 ad personam die ordentliche Professur mit dem Auftrag, Physik für die Chemiker der chemisch-technischen Fachschule zu lehren, erhielt. Nach einem arbeitsreichen Leben hat ihn am 1. Juli dieses Jahres der Tod vom letzten schweren Leiden erlöst. Über 80 Semester akademische Lehrtätigkeit und fast ein halbes Hundert Publikationen geben beredtes Zeugnis von seinem regen Schaffen, von stets gleicher Schaffenslust und von seiner Liebe zum gewählten Beruf als Lehrer und Forscher.

Seiner wissenschaftlichen Tätigkeit dürfte wohl durch den persönlichen Verkehr mit Helmholtz und Nernst die Richtung verliehen worden sein, welche äußerlich ihre Kennzeichnung findet durch die früher erwähnte Habilitation für physikalische Chemie in Göttingen. Seine Arbeiten — ich zähle deren 48 — sind fast durchwegs physikalisch-chemischen Inhaltes, wie ja auch im Lehrberuf chemische Thermodynamik und Elektrochemie seine Lieblingskapitel waren. Nach einigen Einzelarbeiten (über eine neue Form der Noëschen Thermosäule und über die elektrischen Nachströme transversal magnetisierter Eisenstäbe) beginnt schon das eine große Arbeitsgebiet, über die elektrolytische Polarisation, dem 10 Publikationen, an denen er bis in die jüngste Zeit arbeitete, gewidmet sind, und welchem sich unmittelbar sein zweites Interessengebiet, die primären und sekundären Elemente, anschließt, worüber 13 Arbeiten, teils theoretischen, meist aber experimentell-messenden Inhaltes, vorliegen. Sein drittes Hauptinteresse galt der elektrischen Leitfähigkeit von Metallverbindungen; charakteristisch für Streintz und seine

Arbeitsweise ist die zähe Energie und Geduld, mit der er dieses experimentell überaus schwierige Problem nach allen Richtungen durcharbeitete und der fast unvermeidlich scheinenden Fehlerquellen Herr zu werden suchte. Zählen wir die jüngeren Arbeiten über den Übergangswiderstand an den Grenzflächen, als zur Meßtechnik der Hauptaufgabe gehörig, sowie die zusammenfassenden Arbeiten über die Temperaturkoeffizienten der Leitfähigkeit (vgl. insbes. Jahrb. d. Elektr. 10, 221, 1913) dazu, so finden wir 17 Publikationen über diese Kapitel, die die Entstehungsjahre von 1900 bis 1920 umfassen. Endlich liegen noch einige Experimentalarbeiten über Metallstrahlung und interessante Versuche über die Transversalschwingung stromdurchflossener Drähte vor.

Damit ist in ganz kurzen Zügen der Physiker Streintz beschrieben. Es ist, meinem Gefühle nach, in einer wissenschaftlichen Zeitschrift nicht der Platz, über das Privatleben eines lieben verstorbenen Kollegen zu sprechen; obwohl Streintzens Stellung zu seiner Familie, seine produktiven musikalischen Fähigkeiten, vor allem aber seine treue Liebe zum deutschen Volke, der er in den harten Kriegszeiten insbesondere in der „Südmark" einen bis zur Selbstaufopferung tätigen Ausdruck verlieh, wahrlich eines ehrenvollen Nachrufes aus besserer Feder als meine ist, würdig wäre. Mit seiner gütigen, geraden und innerlich heiteren Natur war er seinen Schülern ein wohlwollender, anteilnehmender Lehrer, seinen Kollegen ein ehrlicher Freund, seinem Volke ein treuer Sohn. Wir alle, die wir ihn, weil wir ihn kannten, geschätzt und geehrt haben, wollen ihm ein liebevolles Gedenken bewahren. Fiducit!

Graz, Technische Hochschule, Juli 1922.

K. W. F. Kohlrausch.

# ORIGINALMITTEILUNGEN.

## Die Bestimmung der Elektronenladung aus dem Schroteffekt an Glühkathodenröhren.

Von Reinhold Fürth.

§ 1. Vor einiger Zeit hat Herr Schottky[1]) eine Theorie des von ihm entdeckten und als „Schroteffekt" bezeichneten Phänomens an Glühkathodenröhren gegeben. Dieser Effekt besteht darin, daß in einem Schwingungskreise, der einer Glühkathodenröhre parallel geschaltet ist, infolge der Diskontinuität des Elektronenstromes in der Röhre eine elektrische Schwingung entsteht.

Herr Hartmann[2]) hat in einer experimentellen Arbeit die Größe dieses Schroteffektes gemessen und daraus nach Schottkys Theorie die Elektronenladung auf einem neuen Wege berechnet. Es ergab sich, daß die ermittelten Werte der Elektronenladung um Größenordnungen kleiner ausfielen, als der aus anderen Messungen bekannte Wert, und daß außerdem diese Werte in komplizierter Weise von der Frequenz der Schwingung abzuhängen schienen.

In einer Notiz hat unlängst Herr Johnson[1]) gezeigt, daß bei der Schottkyschen Rechnung ein Fehler unterlaufen ist, der das Resultat im Sinne einer Vortäuschung zu kleiner Elektronenladungen verfälscht. Aber auch nach Vornahme dieser Verbesserung zeigt sich, daß die so berechnete Elektronenladung nur für die größten Frequenzen in die Größenordnung der bekannten Werte fällt, sonst aber überall größer ist; die Frequenzabhängigkeit ist nach wie vor vorhanden.

Herr Schottky hat versucht[2]), durch die Annahme einer gegenseitigen thermischen Beeinflussung der Elektronenemission seitens des Glühdrahtes eine Erklärung der Erscheinung zu geben, die aber etwas gezwungen aussieht.

Im folgenden soll zunächst gezeigt werden, daß man auf viel einfacherem Wege, als dem

1) W. Schottky, Ann. d. Phys. **57**, 541, 1918.
2) C. A. Hartmann, Ann. d. Phys. **65**, 51, 1921.

1) J. B. Johnson, Ann. d. Phys. **67**, 154, 1922.
2) W. Schottky, Ann. d. Phys. **65**, 79, 1921.

von Schottky begangenen, zu einer Theorie des Schroteffektes gelangen kann; beide Theorien geben völlig übereinstimmende Resultate.

Es wird ferner nachgewiesen, daß die Frequenzabhängigkeit der Elektronenladung nur eine scheinbare ist, vorgetäuscht durch einen physiologischen Effekt, und daß bei Berücksichtigung dieses Umstandes an Hartmanns Resultaten eine Korrektur anzubringen ist, die vom Verfasser experimentell ermittelt wurde. Nach Vornahme dieser Korrektur verschwindet die Frequenzabhängigkeit fast völlig und wird die Elektronenladung mit den üblichen Werten in Übereinstimmung gebracht.

§ 2. Die Versuchsanordnung zur Messung des Schroteffektes geht aus der folgenden schematischen Figur hervor (Fig. 1): Die Anoden-

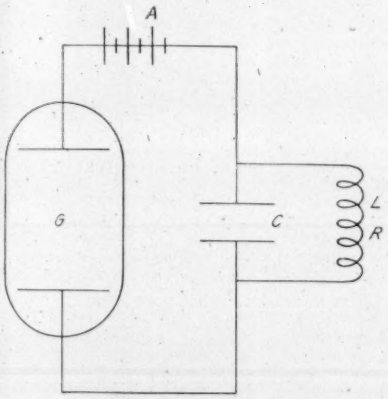



Fig. 1.

batterie $A$ sendet durch die Glühkathodenröhre $G$ (ohne Gitter) den Sättigungsstrom $i_0$, dessen Stärke in bekannter Weise vom Bau der Röhre und von der Heizstromstärke abhängt. Der aus der Selbstinduktion $L$, dem Ohmschen Widerstand $R$ und der Kapazität $C$ bestehende Schwingungskreis wird durch die Diskontinuitäten von $i_0$ zum Schwingen gebracht; die Amplitude dieses „Schroteffektes" ist zu bestimmen.

Zur Vereinfachung denken wir uns, daß von der Glühkathode in äquidistanten Zeitabständen $\tau$ Elektronen mit der Ladung $\varepsilon$ abgeschleudert werden. In jedem Augenblick wird der Kondensator $C$ eine gewisse Ladung $e$ aufweisen, die sich einerseits über $R$ und $L$ auszugleichen sucht, andererseits jedesmal beim Auftreffen eines Elektrons um den Betrag $\varepsilon$ geändert wird.

Beginnen wir die Zeitzählung im Momente des Auftreffens des $n$ten Elektrons auf den Kondensator, so wird die Ladung $e_1$, die er durch das 1. Elektron empfangen hat, nach der folgenden Formel in gedämpften Schwingungen abklingen

$$e_1 = \varepsilon \cdot e^{-\frac{R}{2L}(t-n\tau)} \sin\{\omega_0 (t-n\tau)\},$$

worin $\omega_0$ die Eigenfrequenz des Schwingungskreises bedeutet[1]).

Für das 2. Elektron ergibt sich analog

$$e_2 = \varepsilon \cdot e^{-\frac{R}{2L}(t-(n-1)\tau)} \sin\{\omega_0 (t-(n-1)\tau)^2\},$$

usf.

Jedes auftreffende Elektron gibt nun Anlaß zu einer kleinen Schwingung des Kondensators und in jedem Momente setzt sich die Kondensatorschwingung aus allen diesen Schwingungen zusammen. Entsprechend dem Umstande nun, daß diese einzelnen Schwingungen inkohärent sind, ist die Zusammensetzung so vorzunehmen, daß nicht die Amplituden, sondern die Amplitudenquadrate addiert werden, wie ja aus analogen Problemen der Optik bekannt ist.

Wir denken uns nun seit dem Auftreffen des 1. Elektrons bereits eine so lange Zeit verflossen, daß $n$ sehr groß ist. Dann liefert die Summation im Moment des Auftreffens des $n$ten Elektrons[2]) für das mittlere Quadrat der Kondensatorladung

$$\overline{e^2} = \varepsilon^2 \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{R}{4L}k\tau} \sin^2 \omega_0 k\tau,$$

$$= \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{R}{L}k\tau} = \frac{\varepsilon^2}{2} \cdot \frac{1}{1-e^{-\frac{R}{L}\tau}}.$$

In der Praxis ist nun der Bruch $\frac{R}{L}\tau$ immer sehr klein, und wir können daher mit genügender Näherung schreiben

$$\overline{e^2} = \frac{\varepsilon^2}{2} \cdot \frac{L i_0}{R\varepsilon} = \frac{\varepsilon L i_0}{2R},$$

da der Sättigungsstrom $i_0$ mit $\varepsilon$ und $\tau$ durch die Beziehung zusammenhängt

$$i_0 = \frac{\varepsilon}{\tau}.$$

Daraus folgt für den effektiven Wert der Kondensatorladung

1) Der scheinbar naheliegende Einwand, daß man nicht berechtigt ist, die unteilbare Elektronenladung nach dem obigen Gesetz abklingen zu lassen, ist nicht stichhaltig, da infolge Influenzwirkung einzelner Elektronen auf eine Anhäufung positiver und negativer Ladungen sehr wohl auf einem Teil eines isolierten Systems beliebig kleine Ladungen entstehen können.

2) Diese Annahme bildet keine Beschränkung der Allgemeinheit, wovon man sich sofort überzeugen kann, wenn man berücksichtigt, daß $\tau$ eine sehr kleine Zeit ist.

$$\sqrt{e^2} = \sqrt{\frac{\varepsilon L i_0}{2R}}.$$

Man kann nun auch den Effektivwert der Kondensatorspannung $V$ bestimmen, der mit $\sqrt{e^2}$ zusammenhängt, durch

$$V = \frac{e}{C},$$

also

$$\sqrt{V^2} = \sqrt{\frac{\varepsilon L i_0}{2RC^2}}. \qquad (1)$$

Ist die Dämpfung genügend klein, wie es bei Hartmanns Versuchen tatsächlich der Fall war, so kann man mit genügender Näherung setzen

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Weiter ist die Impedanz $Z$ des Schwingungskreises, der als Spannungsresonator wirkt[1])

$$Z_0 = \frac{\omega_0^2 L^2}{R},$$

was in (1) eingesetzt ergibt

$$\sqrt{V^2} = Z_0 \sqrt{\frac{\varepsilon R i_0}{2L}}. \qquad (2)$$

Dies ist aber identisch mit Formel (1) von Hartmann, wenn man an ihr die Johnsonsche Verbesserung vornimmt, bis auf einen Faktor $\sqrt{2}$, mit dem unsere Formel multipliziert erscheint.

Der Effektivwert des Schroteffektstromes beträgt

$$\sqrt{i^2} = \frac{\sqrt{V^2}}{Z_0} = \sqrt{\frac{\varepsilon R i_0}{2L}}, \qquad (3)$$

was mit Formel (2) bei Johnson übereinstimmt, wieder bis auf den Faktor $\sqrt{2}$. Diese Differenz beruht nun aber auf einem Versehen, das Herrn Schottky unterlaufen ist[2]), indem er irrtümlich die Energie der Schwingung anstatt

$$E_k = \frac{L}{2} a^2_k$$

gleichsetzt

$$E_k = L a_k^2.$$

Dieser Fehler geht in Formel (5) ein, ist aber scheinbar in Formel (6) wieder korrigiert worden. Da nun aber zum Schlusse der Wert für die Schroteffektamplitude wieder aus der falschen Formel (5) berechnet wird, geht der Fehler auch ins Endresultat ein und bewirkt hier gerade das Auftreten des Faktors 4 statt 2 im Nenner von (3).

§ 3. Wir wollen nun zunächst die Angaben der Tabelle (9) von Hartmann[1]) gemäß unserer Formel (3) verbessern. Dies wird bewirkt, indem wir Hartmanns $\varepsilon$-Werte mit $\frac{2L\omega_0}{R}$ multiplizieren. Die $R$ entnehmen wir dabei der 3. Spalte von Tabelle V, die $L$ der 6. Spalte der gleichen Tabelle, bzw. der Fig. 5. Die Resultate sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

Tabelle I[2]).

| $\omega_0$ | $\varepsilon_1 \cdot 10^{10}$ | $\varepsilon_2 \cdot 10^{10}$ |
|---|---|---|
| 1500 | 14,3 | 11,7 |
| 2400 | 12,9 | 11,6 |
| 3000 | 6,5 | 5,9 |
| 3200 | 4,9 | 4,7 |
| 3500 | 3,5 | 3,5 |
| 4000 | 4,0 | 3,5 |
| 4500 | 5,2 | 3,2 |
| 5000 | 7,7 | 0,5 |
| 6000 | 6,5 | 5,0 |
| 7000 | 3,0 | 3,6 |
| 8170 | 2,0 | 1,2 |
| 9400 | 2,2 | 1,4 |
| 10000 | 3,3 | 1,7 |
| 10700 | 2,2 | 1,0 |
| 12000 | 2,5 | 1,9 |
| 14000 | 2,9 | 1,0 |
| 15000 | 5,2 | 3,5 |

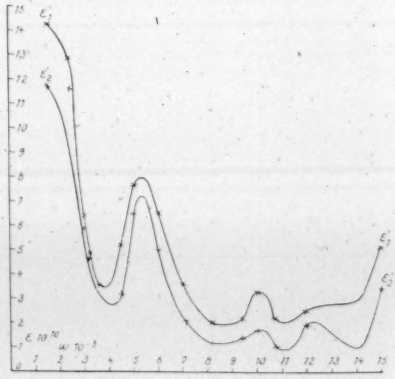



Fig. 2.

Die Tabelle ist in Fig. 2 graphisch dargestellt. Im allgemeinen ist auch jetzt $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, die Kurve zeigt charakteristische Extrema, die jedenfalls, wie aus Hartmanns Arbeit hervorgeht, nicht etwa durch einen Fehler in der Versuchsanordnung entstanden sein können. Dem absoluten Betrage nach sind die $\varepsilon$, wie

1) Hartmann, l. c., S. 63, Formel (3).
2) Schottky, l. c., **57**, 555, 1918.

1) Hartmann, l. c., S. 71.
2) $\varepsilon_1$ bezieht sich auf die Messungen mit $i_0 = 2$ M.-A., $\varepsilon_2$ auf $i_0 = 20$ M.-A.

man sieht, zum Teil größer, zum Teil kleiner als das bekannte $\varepsilon$.

§ 4. Die in Tabelle I wiedergegebenen $\varepsilon$-Werte werden gemäß Formel (2) von Hartmann durch Messung der effektiven Spannung $\sqrt{\overline{V^2}}$ am Kondensator des Schwingungskreises so gefunden, daß diese Spannung zunächst mittels eines Röhrenverstärkers (Hoch- bzw. Niederfrequenzverstärker) soweit verstärkt wird, daß die Wechselspannung an einem Telephon direkt als Ton wahrgenommen werden kann. Seine Messung erfolgt nun so, daß mit einem Glühkathodenröhreninstrumentarium in einem anderen Schwingungskreis ein rein sinusförmiger Wechselstrom erregt wird, der sich durch Nebenschlüsse meßbar schwächen läßt. Seine Frequenz wird zunächst gleich der des Schrotstromes gemacht und man läßt nun auf den Verstärker abwechselnd den zu messenden Schroteffekt und die Vergleichstonquelle wirken, die man durch die Nebenschlüsse so lange variiert, bis im Telephon Tongleichheit herrscht. Hartmann schließt dann, daß bei Tongleichheit im Telephon die unbekannte Spannung $\sqrt{\overline{V^2}}$ gleich ist der meßbaren Effektivspannung $V'$ des Vergleichsstromes.

Diese Schlußweise wäre nun zwar dann richtig, wenn entweder beide Ströme rein sinusförmigen Verlauf hätten, oder aber die Tonempfindung der Intensität des Tones proportional wäre. Keines von beiden ist nun aber in Wirklichkeit der Fall, denn der durch den Schroteffekt hervorgerufene Ton ist im Gegensatz zum Vergleichston nicht konstant, sondern der Natur seiner Entstehung nach rasch und unregelmäßig schwankend; anderseits ist der Zusammenhang zwischen objektiver Tonstärke und Tonempfindung keineswegs ein linearer, sondern es herrscht da eine kompliziertere, von Individuum zu Individuum variierende Beziehung, die derzeit gar nicht genau bekannt ist und auch im Sinne eines allgemeingültigen Gesetzes sicher nicht existieren dürfte. In erster Annäherung kann jedoch dieser Zusammenhang wohl durch das bekannte Weber-Fechnersche Gesetz wiedergegeben werden.

Es geht also nicht an, im Falle der Tongleichheit die Größen $V'$ und $\sqrt{\overline{V^2}}$ einander gleich zu setzen. Wir wollen daher einmal zusehen, wie sich unter Annahme des Weber-Fechnerschen Gesetzes die Sachlage stellt, was allerdings aus dem oben angeführten Grunde eine bloß provisorische Annahme ist, jedoch für unsere Zwecke zunächst genügt.

Das Gesetz läßt sich mathematisch in folgende Form bringen

$$s = c \log \frac{r}{r_0}, \tag{4}$$

wenn man mit $s$ die Stärke der Empfindung, mit $r$ die Stärke des Reizes, mit $r_0$ schließlich die Reizschwelle bezeichnet, das heißt jenen Reiz, der gerade noch ausreicht, um eine Empfindung hervorzurufen. $c$ ist eine Konstante, auf die es weiter nicht ankommt.

Da in unserem Falle die Reizstärke dem Quadrat der Spannungsamplitude proportional ist, können wir setzen

$$s = c \cdot \log \frac{V^2}{V_0^2}. \tag{5}$$

Ist nun der Ton von der Art eines Schwankungstones mit konstanter Tonhöhe, aber rasch wechselnder Amplitude, so wird die Intensität des Schwankungstones $s_1$ gegeben sein durch den Mittelwert, der sich aus (5) ergibt, wenn man jedes $s$ mit der relativen Häufigkeit seines Auftretens multipliziert und alle diese Ausdrücke von $v = v_0$ bis $\infty$ integriert, also

$$s_1 = 2 \int_{V_0}^{\infty} c \cdot \log \frac{v}{v_0} \cdot W(V)\, dV \cdot \frac{1}{\int_{V_0}^{\infty} W(V)\, dV}. \tag{6}$$

Was nun die Größe $W(V)$ betrifft, so lehrt uns ein sehr allgemeiner Satz der statistischen Mechanik, daß die Wahrscheinlichkeit einer solchen Konfiguration eines, unregelmäßigen Schwankungen ausgesetzten Systems, das nur von einem Parameter $x$ abhängig gedacht wird, so daß $x$ zwischen $x$ und $x + dx$ liegt, gegeben ist durch

$$W(x)\, dx = A \cdot e^{-\frac{\chi(x)}{2\overline{E}}} dx,$$

worin $\overline{E}$ die mittlere Energie und $\chi(x)$ die Arbeit bedeutet, um das System aus dem Ruhezustand $x = 0$ in den oben bezeichneten Zustand zu bringen, $A$ ist eine Konstante. In unserem Falle ist nun $\chi(x)$ proportional zu der Schwingungsenergie, also proportional zu $V^2$, und $\overline{E}$ proportional zu $\overline{V^2}$ mit derselben Konstanten. Wir können daher schreiben

$$W(V)\, dV = A e^{-\frac{V^2}{2\overline{V^2}}} dV \tag{7}$$

und dies in (5) eingesetzt, ergibt

$$s_1 = 2c \frac{\int_{V_0}^{\infty} \log \frac{V}{V_0} e^{-\frac{V^2}{2\overline{V^2}}} dV}{\int_{V_0}^{\infty} e^{-\frac{V^2}{2\overline{V^2}}} dV} = 2c \frac{J_1}{J_2}, \tag{8}$$

wenn man zur Abkürzung setzt

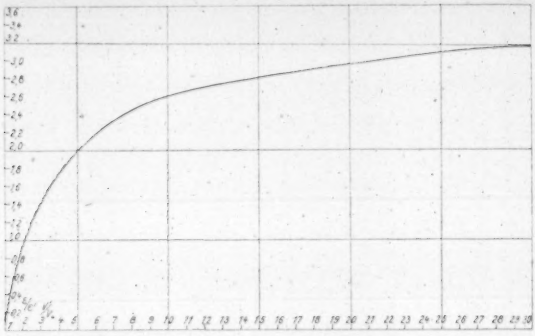


Fig. 3.

$$J_1 = \int_1^{\infty} \log y \, e^{-\frac{V_0^2}{2V^2} y^2} dy,$$
$$J_2 = \int_1^{\infty} e^{-\frac{V_0^2}{2V^2} y^2} dy, \qquad (9)$$
$$y = \frac{V}{V_0}.$$

Analog folgt für die Intensität $s_2$ des Vergleichstones

$$s_2 = 2c \cdot \log \frac{V'}{V_0}. \qquad (10)$$

Bei Tongleichheit muß nun $s_1 = s_2$ sein. Daher gemäß (8) und (10)

$$\log \frac{V'}{V_0} = \frac{J_1}{J_2}. \qquad (11)$$

Durch numerische oder graphische Auswertung der Integrale (9) als Funktionen von $\frac{V_0^2}{V^2}$ kann man nun aus (11) $\frac{V'}{V_0}$ als Funktion von $\frac{V_0}{\sqrt{V^2}}$ berechnen, und weiter $\frac{\sqrt{V^2}}{V'}$ als Funktion von $\frac{V'}{V_0}$.

$\frac{\sqrt{V^2}}{V'}$ ist nun aber gerade jene Größe, mit der man die nach Hartmanns Methode gefundenen $\varepsilon'$ zu multiplizieren hat, um die wahren $\varepsilon$ zu erhalten, da in Formel (3) das $V$ quadratisch eingeht, wenn man sie nach $\varepsilon$ auflöst.

§ 5. Die Rechnung wurde nun tatsächlich durchgeführt und ergab das folgende in Tabelle II enthaltene Resultat, wo sinngemäß $V_0$ die Mindestspannung bedeutet, die man am Schwingungskreis hervorrufen muß, um im Telephon gerade noch einen Ton zu erhalten.

Tabelle II.

| $\frac{V'}{V_0}$ | $\frac{\sqrt{V^2}}{V'}$ | $\frac{V'}{V_0}$ | $\frac{\sqrt{V^2}}{V'}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 9 | 2,52 |
| 1,5 | 0,60 | 10 | 2,60 |
| 2 | 0,94 | 12 | 2,69 |
| 3 | 1,39 | 14 | 2,76 |
| 4 | 1,72 | 16 | 2,83 |
| 5 | 1,98 | 18 | 2,88 |
| 6 | 2,18 | 20 | 2,93 |
| 7 | 2,33 | 25 | 3,06 |
| 8 | 2,44 | 30 | 3,15 |

Fig. 3 stellt die graphische Darstellung dieser Tabelle vor.

Man sieht, daß für kleine absolute Intensitäten der Wert $\frac{\sqrt{V^2}}{V'}$ kleiner ist, als nach Hartmanns Methode herauskommt, bei größeren Intensitäten umgekehrt. Wenn nun $V_0$ eine Funktion der Frequenz ist, ist zu erwarten, daß auch das $\varepsilon'$ eine scheinbare Abhängigkeit von der Frequenz aufweisen wird.

Die Abhängigkeit des $V_0$ von der Frequenz beruht auf zwei Umständen. Erstens nämlich ist die absolute Reizschwelle von der Tonhöhe, d. h. von der Frequenz abhängig, und zwar liegt sie für sehr hohe und sehr tiefe Töne hoch (entsprechend der oberen und unteren Hörbarkeitsgrenze), dazwischen ist der Verlauf recht kompliziert und besitzt jedenfalls eine Anzahl Extrema. Außerdem wird aber auch das Telephon für verschiedene Frequenzen verschieden stark ansprechen, am stärksten für Töne in der Nähe der Eigenfrequenz der Telephonmembran, die bei den gebräuchlichen Telephonen im Hörbarkeitsgebiet liegt. Dabei muß noch berücksichtigt werden, daß auch der scheinbare Widerstand des Telephons infolge Impedanz, Membran-

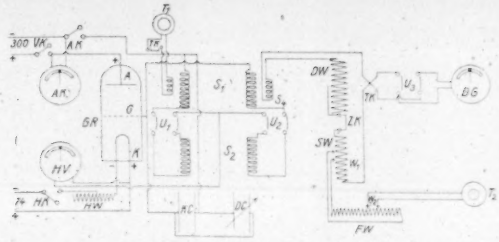



Fig. 4.

schwingung und Wirbelströmen in der Membrane von der Frequenz abhängt. Es existieren nun zwar eine Reihe von Untersuchungen, in denen die oben erwähnten Abhängigkeiten einzeln zur Untersuchung gelangen, speziell die Abhängigkeit der Reizschwelle von der Tonhöhe ist schon öfters untersucht worden[1]). Für den vorliegenden Zweck erschien es jedoch einfacher, gleich alle hier in Betracht kommenden Umstände auf einmal, und zwar gleich an einem Telephon von der Art, wie es Herr Hartmann wahrscheinlich verwendet haben dürfte, experimentell zu untersuchen, d. h. die Mindestspannungen zu finden, die man am Telephon anlegen muß, um gerade noch einen Ton zu hören in Abhängigkeit von der Frequenz.

§ 5. Ich bediente mich dazu folgender Versuchsanordnung. Siehe die schematische Fig. (4).

Die Schwingungen wurden mit der Glühkathodenröhre $G$ (Senderöhre Type $M$ von Schott für 30 Watt Schwingungsenergie und 300 Volt Anodenspannung, 1,2 Amp. Heizstromstärke) erzeugt. Die Anodenbatterie war eine kleinzellige Akkumulatorenbatterie von 300 Volt, die Heizbatterie eine Akkumulatorenbatterie von 14 Volt. Der Heizstrom konnte durch den Widerstand $HW$ reguliert und seine Spannung an dem Voltmeter $HV$ abgelesen werden. Zur Messung der Anodenspannung diente das ausschaltbare Voltmeter $AV$. Der Schwingungskreis bestand aus dem klavierartig durch Tasten variierbaren Kondensator $KC$ und dem zur Feineinstellung parallel geschalteten Drehplattenkondensator $DC$, sowie den beiden Paaren von Selbstinduktionsspulen $S_1$ und $S_2$, mit verschieden großer Selbstinduktion, von denen entweder $S_1$ oder $S_1$ und $S_2$ hintereinander mittels der beiden Schalter $U_1$ und $U_2$ eingeschaltet werden konnten. Die kleine Koppelungsspule $S_3$ führt durch einen Schlüssel zu einem Telephon $T_1$, das zum Einstellen der Frequenz und zu deren Kontrolle während des Versuches diente.

Die Koppelungsspule $S_4$ führt durch den Dekadenwiderstand $DW$ und durch den Stöpselwiderstand $SW$ von 10 Ohm in den einen Zweig des Thermokreuzes $TK$ (Konstantan—Eisen); durch den Quecksilberkontakt $ZK$ kann die Leitung unterbrochen werden.

Der andere Zweig des Thermokreuzes führt durch den Kommutator $U_3$ zu einem empfindlichen Drehspulengalvanometer $DG$, das zur Messung des in $S_4$ induzierten Wechselstromes dient. Von $SW$ zweigt im Nebenschluß eine Leitung ab, die zu einem zweiten kontinuierlich veränderlichen Nebenschluß führt, der in genügender Entfernung von der übrigen Versuchsanordnung aufgestellt war, um direkte induktive Beeinflussung desselben vom Schwingungskreis her zu vermeiden. Von diesem zweiten Nebenschluß führt eine Drahtleitung in ein anderes Zimmer zu dem Versuchstelephon $T_2$, wo der Telephonbeobachter ungestört durch Nebengeräusche seine Aufmerksamkeit völlig auf die Töne im Telephon konzentrieren konnte.

Dieses Telephon $T_2$ war ein Kopftelephon mit einer Muschel der Firma C. Lorenz, Berlin für Zwecke der drahtlosen Telegraphie mit einem Widerstand von 4780 Ohm, und einem Selbstinduktor von 6,3 Amp.

Das Thermokreuz samt Galvanometer wurde in der Weise geeicht, daß an Stelle von $S_4$ ein Trockenelement und ein Gleichstrommilliamperemeter eingeschaltet wurde, und durch Variieren von $DW$ den Stromstärken die Ausschläge des Galvanometers zugeordnet wurden.

Die Tonfrequenz wurde durch Vergleich des Tones in $T_1$ mit einem nach Frequenzen geeichten Monochord festgestellt.

§ 6. Der Gang der Untersuchung war der folgende. Die Messung erfolgte durch zwei Beobachter, von denen der eine am Telephon

1) U. a. M. Wien, Pflügers Archiv f. Phys. **97**, 1, 1903; J. P. Minton, Phys. Rev. **19**, 80, 1922.

$T_2$ saß[1]), während der andere alle übrigen Manipulationen ausführte.

Durch entsprechende Einstellung von Selbstinduktion $S_1$ bzw. $S_2$ und Kapazität $KC$ und $DC$ wurde zunächst auf eine bestimmte Frequenz eingestellt; dann wurde $W_1$ und $W_2$ so gewählt, daß bei kurzgeschlossenem $DW$ an $T_2$ ein Ton noch gut gehört werden konnte, jedoch so, daß die Minimalstromstärke im Thermokreuz nicht den Meßbereich des Galvanometers unterschritt. Nun wurde $DW$ allmählich vergrößert und durch Schließen von $K$ in einem bestimmten Rhythmus ein Signal gegeben. Wurde dieses im Telephon noch gehört, so gab der Beobachter durch einen Tasterdruck Kontakt an einem, zu einer kleinen Glühlampe führenden Strom, die dem zweiten Beobachter durch ihr Aufleuchten anzeigte, daß das Signal verstanden worden war. $DW$ wurde auf diese Weise so lange erhöht, bis die Zeichen ausblieben. Das Verfahren wurde sodann wiederholt und zwar so oft, bis die Grenze der Hörbarkeit mit genügender Genauigkeit festzustehen schien[2]).

Nun wurde $U_3$ geschlossen und der Ausschlag von $DG$ abgelesen. Aus diesem durch Verwendung der Eichkurve und aus den Nebenschlüssen $W_1$ und $W_2$ ergibt sich direkt die Voltempfindlichkeit des Telephons, d. h. die Größe $V_0$. Öftere, an verschiedenen Tagen und mit verschiedenen Nebenschlüssen an einem Ton vorgenommene Messungen zeigten untereinander gute Übereinstimmung.

Auf diese Weise wurde das Gebiet zwischen 200 und 2200 Schwingungen pro Sekunde untersucht. Die Resultate von 4 an 4 Abenden vorgenommenen Meßreihen[3]), die miteinander gut übereinstimmten, stellen das Ergebnis dieser Untersuchung dar.

Um sich zu überzeugen, ob nicht zufällig bei dem Beobachter vorhandene größere Hörabnormitäten vorhanden seien, die das Resultat stark verfälschen müßten, wurde eine Vergleichung mit den Kurven von Minton vorgenommen, die sich auf normale Ohren beziehen, und zwar mit dem Mittelwert aus den Kurven 3 und 4, S. 85, die den Verlauf der minimalen Erregungsenergie für das rechte und linke Ohr eines Beobachters darstellen. Unter Berücksichtigung der variablen Impedanz des von uns verwendeten Telephons wurde diese auf Minimalspannungen umgerechnet und für die höheren Frequenzen von ca. 6000 angefangen, wo die Eigenfrequenz der Telephonmembrane nicht mehr in Betracht kommt, an unsere Beobachtungen angeschlossen, was man unbedenklich tun kann, da sich zwischen beiden Beobachtungsreihen, was die Lage der Extremalwerte anlangt, gute Übereinstimmung zeigte.

Die so schließlich gewonnene Abhängigkeit des $V_0$ von der Frequenz zeigt die folgende Fig. 5 in relativem Maße, worauf es uns hier allein ankommt.

Bei der Weiterverwertung dieser Ergebnisse für unsere Zwecke ist zu berücksichtigen, daß sowohl die Schwellenwerte selbst von Person zu Person stark variieren können, als auch, daß der Verlauf der $V_0$-Kurve von der Art des verwendeten Telephons beeinflußt wird, so daß also die Hartmannsche $V_0$-Kurve von der hier verwendeten etwas abweichen wird. Für den vorliegenden Zweck kommt es aber nur auf den ungefähren Verlauf dieser Kurve an.

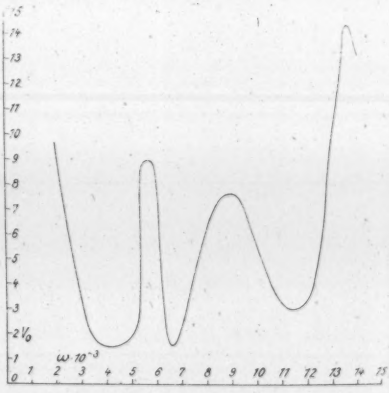



Fig. 5.

Wenn wir die Figg. 5 und 2 miteinander vergleichen, so fällt uns sofort eine weitgehende qualitative Ähnlichkeit der beiden in die Augen, sowohl was die Zahl, als auch was die ungefähre Lage der Extrema anlangt. Das ist nun aber gerade das, was wir nach unserer Theorie erwarten müssen. Denn gemäß Tabelle II be-

1) Herrn E. Mikulaschek, Assistenten am Physikalischen Institut, der sich mir für diese schwierigen und anstrengenden Messungen zur Verfügung stellte, spreche ich hiermit meinen besten Dank aus.

2) Die Beobachtungen wurden, um akustische Störungen tunlichst auszuscheiden, am Abend nach Eintritt vollkommener Stille angestellt.

3) Es wurde prinzipiell nur bei absteigender Intensität gemessen, da es sich herausstellte, daß bei aufsteigender Folge immer viel größere Schwellenspannungen angegeben würden. Das rührt daher, weil der Beobachter im ersteren Falle allmählich an die kleiner werdende Lautstärke gewöhnt wird, jedoch bei aufsteigender Folge das Zeichen erst wieder finden muß, wenn er es einmal verloren hat. Da wir aber die wirkliche Reizschwelle feststellen wollen, kann nur das erste Verfahren in Betracht kommen.

wirkt ein kleiner Wert von $V_0$ einen großen Wert der Korrektur $\varepsilon/\varepsilon'$, oder das scheinbare von Hartmann gemessene $\varepsilon'$ muß an dieser Stelle zu klein herauskommen und umgekehrt.

Wir können das nun aber auch quantitativ verfolgen. Wir bringen zunächst an Kurve 5 eine kleine Korrektur an, indem wir ihre Extrema ein wenig verschieben, so daß ihre Lage mit derjenigen der Extrema in 2 übereinstimmt. Das bedeutet nach dem im vorigen Paragraphen auseinandergesetzten nichts anderes, als daß wir die von uns beobachteten Extrema der Reizschwellen bzw. der Eigenfrequenz der Telephonmembrane in Übereinstimmung bringen mit denen von Hartmann. Wir bilden nun die Größen $V'/V_0$, und zwar sowohl für die 1. Meßreihe mit $i_0 = 2$ Milliamp., als auch für die zweite Meßreihe mit $i_0 = 20$ Milliamp. Die $V'$ entnehmen wir dabei der Tabelle IX bei Hartmann, l. c., S. 71, Spalte 2 bzw. 5.

Da die letzteren Werte durchwegs größer sind als die ersteren, ergibt dies nach unserer Theorie eine Erhöhung der Korrektur für die zweite Meßreihe gegenüber der ersten, oder mit anderen Worten, die scheinbaren $\varepsilon'$ von Hartmann müssen für die zweite Reihe kleiner herauskommen als für die erste, was auch wirklich der Fall war, wie aus Tabelle I oder Fig. 2 hervorgeht.

Aus Tabelle II oder Fig. 3 entnehmen wir nun zu diesen Werten $\frac{V'}{V_0}$ die zugehörigen Korrekturen $\varepsilon/\varepsilon'$ und multiplizieren diese mit den Werten der Tabelle VIII, bzw. Fig. 2, was die wahren $\varepsilon$ ergeben soll, wenn unsere Theorie richtig ist[1]).

Das Resultat sehen wir in der Tabelle III bzw. Fig. 6.

Tabelle III.

| $\omega_0$ | $\varepsilon_1 \cdot 10^{10}$ | $\varepsilon_2 \cdot 10^{10}$ |
|---|---|---|
| 2000 | 4,0 | 3,8 |
| 3000 | 8,2 | 6,2 |
| 4000 | 7,3 | 5,7 |
| 5000 | 8,1 | 6,2 |
| 6000 | 6,6 | 5,4 |
| 7000 | 4,5 | 5,5 |
| 8000 | 3,3 | 5,0 |
| 9000 | 2,5 | 3,5 |
| 10000 | 2,2 | 4,0 |
| 11000 | 2,2 | 4,0 |
| 12000 | 5,3 | 2,8 |
| 13000 | 4,4 | 3,3 |
| | Mittel: $4{,}9 \cdot 10^{-10}$ | $4{,}6 \cdot 10^{-10}$ |

1) Dabei wurde die Annahme gemacht, daß der Verstärkungsgrad für den von Hartmann verwendeten Niederfrequenzverstärker ebenso groß war, wie für den Hochfrequenzverstärker, von denen der letztere für die Frequenzen über 3500, der erstere für die niedrigeren verwendet worden war. Diese Annahme enthält eine große Willkür, um so mehr, als ja der Verstärkungsgrad beim Niederfrequenzstärker von der Frequenz nicht unabhängig ist.

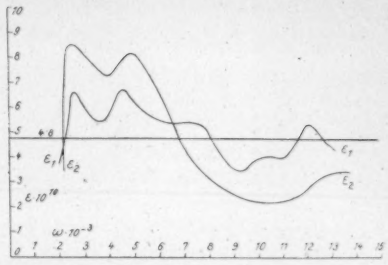



Fig. 6.

Man bemerkt, daß nunmehr $\varepsilon$ um den bekannten Wert der Elektronenladnng hin und her schwankt, ohne sich nach beiden Seiten viel von ihm zu entfernen. Der noch bestehenden Frequenzabhängigkeit kann wohl keine reelle Bedeutung zugeschrieben werden, da, wie sich gezeigt hat, geringe Änderungen des Verlaufes der $V'$ und $V_0$-Kurven die Lage der Extremwerte völlig verändern. Es handelt sich also wohl sicher zum Teil um Versuchsfehler, zum Teil um die bereits öfters erwähnten physiologischen Abweichungen zwischen den verschiedenen Beobachtern.

Im allgemeinen ist die Annäherung an den Standardwert bei der zweiten Meßreihe weniger gut, als bei der ersten, indem hier im ersten Teil der Kurve durchwegs zu große, im zweiten Teil durchwegs zu kleine $\varepsilon$ herauskommen. Ob diesem Umstand eine reelle Bedeutung zukommt, scheint fraglich. Der Mittelwert der ganzen Reihe ist für beide Meßreihen gleich gut und dem Standardwert sehr nahe.

## Zusammenfassung.

1. Es wird eine einfache Theorie des von Schottky vorausgesagten Schroteffektes an Glühkathodenröhren gegeben, die nach Verbesserung zweier kleiner Rechenfehler bei Schottky zu dem gleichen Resultate wie die Schottkysche Theorie führt.

2. Es wird gezeigt, daß die zum Zwecke der Bestimmung der Elektronenladung aus dem Schroteffekt von Hartmann angestellten Messungen durch einen physiologischen Effekt entstellt erscheinen und es wird eine Theorie dieses Effektes gegeben.

3. Es wird eine Versuchsanordnung beschrieben, mit der man die Minimalspannungen, die zur Hervorbringung eines Tones im Tele-

phon gerade noch ausreichen, in Abhängigkeit von der Frequenz bestimmen kann und die Resultate der diesbezüglich angestellten Versuche werden mitgeteilt.

4. Auf Grund dieser Versuche läßt sich die erwähnte Verfälschung der Hartmannschen Messungen qnantitativ in Rechnung ziehen. Die so korrigierten Ladungswerte Hartmanns schwanken unregelmäßig um einen von der Frequenz unabhängigen Wert, der innerhalb der Versuchsgenauigkeit mit dem bekannten Wert der Elektronenladung identisch ist.

(Eingegangen 12. Juli 1922.)

## Der Lichtbogen als Gleichrichter.

Von Stanislaw Borowik.

Beim Studium des Verhaltens des Wechselstromlichtbogens fand ich folgendes Resultat.

1. Der Lichtbogen, dessen eine Elektrode mit Eisenoxyd belegt ist und dessen andere Elektrode aus Kohle besteht, läßt nur diejenige Phase des Wechselstromes durch, für welche das Oxyd als Anode erscheint. Diese Erscheinung ist vollkommen konstant bei Stromstärken von 2 bis 30 Ampere und darüber und bei einer Spannung von 100 bis 1500 Volt. Als Vorrichtung kann man einen gewöhnlichen automatischen Wechselstromregulator mit einer unbedeutenden Änderung der Regulierung anwenden. Die Ventilwirkung ist wirklich vollständig, wie die Registrierung mit dem Ondographen Hospitalie zeigt.

2. Die Ventilwirkung wurde auch bei dem Strom des Induktoriums beobachtet; nur in dem Falle, wo das Oxyd positiv war, fand eine vollständige Gleichrichtung statt, dagegen betrug dieselbe nur 80 Proz., wenn es negativ war. Die Ventilwirkung wurde fast unmerklich bei einer Entfernung von mehr als 0,4 mm. Die Ventilwirkung wurde auch bei Anwendung von gleichen Elektroden (Kohlenelektroden) beobachtet.

3. Ich beobachtete eine intensive Emission positiver Ionen bei Erwärmung der Oxyde bis zu hohen Temperaturen. Bei 1000° C und einer Spannung von 110 Volt erreicht die Stärke des positiven Stromes einige Milliampere; bei der Verbindung des Oxyds mit dem negativen Pole wurde kein Strom beobachtet.

4. Der Wechselstrombogen zwischen zwei Oxyden bildet sich nicht.

5. Ich schlage folgende Erklärung der Ventilwirkung des Bogens vor. Er bildet ein System von sich in entgegengesetzter Richtung bewegender Elektronen und positiver Ionen; als Resultat ihrer Wechselwirkung (Gegenwirkung) erhält man ein System dynamischen Gleichgewichts, dessen Konstanz die Ventilwirkung ergibt.

Petrograd, Laboratorium des physikalischen Zentralobservatoriums.

(Eingegangen 19. Juli 1922.)

## Die Achsenrotation der Planeten.

Von H. Troeger-Wohlau.

In einer vor kurzem erschienenen Arbeit hat H. Kaul[1]) eine verblüffend einfache Gleichung für die Achsenrotation der Planeten aufgestellt, während bisher niemand daran gedacht hatte, daß es ein Gesetz für alle Umdrehungen geben könnte. Dem Keplerschen Satz ähnlich, lautet sie:

$$R^2 = \left(1 + rK - \frac{K}{ra^2}\right)^3.$$

Bezeichnungen siehe a. a. O.

Ist die Klammer negativ, dann ist die ganze rechte Seite negativ wegen der 3. Potenz, und $R$ als Quadratwurzel daraus ist imaginär. In diesem Falle gibt es also keine eigentliche Rotation, die Gezeitenreibung überwiegt und der Planet wendet dem Hauptkörper stets dieselbe Seite zu. Es gibt eine Grenze, wo diesseits die Klammer positiv — eine Achsendrehung also vorhanden ist — und wo jenseits die Klammer negativ wird — die Umdrehung damit aufhört. Die Stelle ist dort, wo:

$$1 + rK = \frac{K}{ra_1^2} = 0$$

ist! Daraus ergibt sich:

$$1 + rK = \frac{K}{ra_1^2}, \quad a_1^2(1 + rK) = \frac{K}{r},$$

$$a_1^2 = \frac{K}{r(1 + rK)}.$$

Es gäbe für jeden Planeten einen Sonnenabstand, für den die Rotation aufhören müßte, dieser Abstand ist gerade dieses $a_1$. Merkwürdigerweise ist er außer von der Konstanten $K$ nur vom Durchmesser des Körpers abhängig! Große Planeten könnten also sehr nahe an die Sonne heranrücken, ohne ihre Achsendrehung einzubüßen, während kleine schon in weiterer Entfernung zur Ruhe gebracht werden. Für Ausrechnung des $a_1$ eignet sich am besten die Gleichung:

1) H. Kaul, diese Zeitschr. **23**, 184, 1922.

$$a_1^2 = \frac{100K}{r(100 + 100rK)} \sim \frac{6{,}52}{r(100 + 6{,}52r)}.$$

| $r =$ | $10r$ | $r$ | $0{,}1r$ | $0{,}01r$ | $0{,}001r$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Durchmesser | 127 000 km | 12 750 km | 1275 km | 128 km | 13 km |
| $a_1 =$ | 0,063 | 0,25 | 0,81 | 2,55 | 8,1 |

$a_1$ ergibt sich für Merkur zu 0,41; Venus 0,246; Erde 0,248; Mars 0,344.

Wir sehen, daß Merkur mit $0{,}38 = a$ nahe an dem Grenzpunkte steht ($a_1 = 0{,}41$)[1]). Dagegen stehen die anderen Planeten weit von der kritischen Stelle ab.

Wenn das Gesetz für die Umdrehung nicht nur zwischen Sonne und Planeten, sondern auch zwischen den Planeten und ihren Monden gilt, so können wir für diese die typischen Abstände ausrechnen. Für unsern Erdmond ergibt sich dabei $a_1 = 0{,}408$; die wirkliche Entfernung ist 0,00258. Er steht also vollständig in dem Bereiche, wo jede Umdrehung unmöglich ist. Für die anderen Monde ergeben sich durchaus die gleichen Verhältnisse.

1) Umdrehung unmöglich.

(Eingegangen 27. Juli 1922.)

## Die absoluten Dimensionen der Kármánschen Wirbelbewegung.

Von Werner Heisenberg.

In einer bekannten Arbeit[1]) gelang es Kármán, den Widerstand $W$ einer ebenen Platte, die senkrecht zu ihrer Ebene im Wasser mit der Geschwindigkeit $U$ bewegt wird, zu berechnen auf Grund von Daten, die dem Strömungsbild selbst entnommen waren.

Die Kármánsche Untersuchung beschäftigte sich mit dem Strömungsbild in einigem Abstand hinter der Platte. Das Experiment zeigte, daß sich dort eine regelmäßige Anordnung von Wirbelfäden, eine „Wirbelstraße" ausbildet (Fig. 2), die, hinter der Platte zurückbleibend, mit langsamerer Geschwindigkeit als jene im Wasser vorschreitet. Die relativen Dimensionen dieser Anordnung, d. h. das Verhältnis des Wirbelabstandes ($l$) zur Breite ($h$) der Wirbelstraße (Fig. 1) wurden auf Grund einer Stabilitätsuntersuchung ermittelt; die Geschwindigkeit $u$ und eine lineare Abmessung des Wirbelsystems

1) Kármán, Göttinger Nachr. 1911, S. 509 u. 1912, S. 547 und Kármán u. Rubach, diese Zeitschr. **13**, 49, 1912.

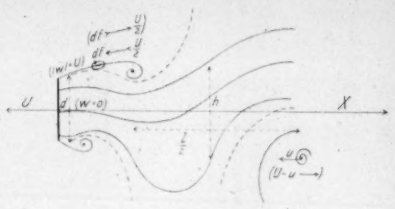



Fig. 1.

(etwa der Abstand $l$ zweier aufeinanderfolgender Wirbel gleichen Drehsinns) mußten jedoch experimentell gesucht werden, damit der Widerstand $W$ wirklich angegeben werden konnte. Die Frage nach dem Zustandekommen des Wirbelsystems blieb unbeantwortet.

Nach dem Helmholtzschen Satze, daß in einer reibungslosen Flüssigkeit keine Wirbel entstehen können, lag es zunächst nahe, die Viskosität für die Bildung des Wirbelsystems verantwortlich zu machen; auch Kármán hielt (l. c.) ein Eingehen auf die Vorgänge in der „Grenzschicht" der Platte für nötig, um die Unbekannten $u$ und $l$ des Wirbelschweifes zu berechnen. Nach den Berechnungen von Oseen[1]) haben wir jedoch anzunehmen, daß der Einfluß der Reibung gerade in unmittelbarer Nähe der Platte geringer ist, als in einiger Entfernung hinter derselben. Ferner wurde von Jaffé[2]) gezeigt, daß auch in einer reibenden Flüssigkeit im allgemeinen keine Wirbel entstehen können, daß also der Grund der überall in der Hydrodynamik auftretenden Wirbelbildung nicht in der Reibung gesucht werden kann. Es liegt nach Jaffé vielmehr dann ein Grund zur Wirbelbildung vor, wenn in den äußeren Kräften oder den Geschwindigkeiten der Flüssigkeit Unstetigkeiten auftreten. In unserem Falle sind an der Platte sicherlich solche Unstetigkeiten vorhanden. Es soll also im Folgenden der Versuch gemacht werden, aus einer Betrachtung dieser Unstetigkeiten die Größen $u$ und $l$ bzw. $\frac{u}{U}$ und $\frac{l}{d}$ ($d$ = Plattendicke) zu ermitteln.

Die einzige[3]), bisher bekannte Strömungsform des Wassers an ebenen Platten, bei der die Strömungsgeschwindigkeit am Rand der Platte nicht unendlich wird, ist die Helmholtz-

1) Oseen, Ann. d. Phys. **46**, 231 u. 646, 1915.
2) Jaffé, diese Zeitschr. **21**, 541, 1920.
3) Dies trifft, worauf mich Herr Prof. Jaffé freundlicherweise aufmerksam machte, nicht ganz zu. A. R. Richardson (Phil. Mag. **38**, 433, 1919) gibt eine mathematisch sehr interessante andere Lösung an, die allerdings kaum physikalische Bedeutung haben dürfte.

Kirchhoffsche unstetige Potentialbewegung[1]) (Fig. 1).

Die mehrfach festgestellte praktische Unmöglichkeit dieser Strömung, die wegen ihrer Unstetigkeitsflächen als Wirbelströmung auf-zufassen ist, hat ihren Grund jedenfalls in der Labilität der auftretenden Wirbelschichten. Immerhin liegt die Vermutung nahe, daß der unstetigen Potentialbewegung wenigstens in unmittelbarer Nähe der Platte Geltung zukommen müsse.

In der Tat zeigen photographische Abbildungen übereinstimmend, daß das wirkliche Strömungsbild in unmittelbarer Nähe der Platte der Kirchhoffschen Potentialbewegung außerordentlich ähnlich ist. Wir wollen also über die Entstehung des Kármánschen Wirbelsystems folgende Annahme versuchen (vgl. Fig. 1)[2]):

In unmittelbarer Nähe der Platte bildet sich zunächst die unstetige Potentialbewegung aus. In einigem Abstand von der Platte rollen sich die Unstetigkeitsflächen bzw. Wirbelschichten dieser Potentialbewegung, wegen ihrer Labilität, auf und liefern in weiterem Abstande von der Platte die Kármánsche Wirbelanordnung.

Diese Annahme kann insofern nur eine Annäherung an die Wirklichkeit darstellen, als die in einigem Abstand auftretenden Wirbel auch die Strömung in nächster Nähe der Platte nicht unbeeinflußt lassen werden. Ferner können wir sie nur für die Vorderseite und die Kanten der Platte gelten lassen, da wir im „toten" Wasser jedenfalls eine ziemlich undefinierte Wirbelbewegung (nicht aber Wirbelbildung) haben.

So einfach und plausibel nun der so formulierte Ansatz zunächst scheint, so lassen sich doch, wie mir Herr Prof. Prandtl freundlichst mitgeteilt hat, gewichtige Einwände gegen ihn erheben, vgl. dessen Zusatz am Schluß des Artikels. Herr Prof. v. Kármán hat für diese Einwände die folgende Form gefunden: „Wendet man den Ansatz wörtlich auf den Bobileffschen Fall des symmetrischen Keils an, so liefert er für alle Keilwinkel denselben Widerstandskoeffizienten (nämlich stets denselben, wie für die ebene Platte)". Es bleibt also die Frage offen, weshalb gerade in unserem Falle der Ansatz der Wirklichkeit weitgehend entspricht. Jedenfalls wird die weitere Rechnung zeigen, daß bei der Platte die oben gemachte Annahme zu bemerkenswert guter Übereinstimmung mit der Erfahrung führt.

## 1. Bedingung für die Geschwindigkeit des Wirbelsystems.

Zur Berechnung der Unbekannten $u$ und $l$ bieten sich ohne Schwierigkeit zwei Gleichungen dar. Zunächst folgt aus dem Satz von der Erhaltung des Wirbelmomentes, den wir auf jede der beiden sich einrollenden Wirbelschichten anwenden, daß das pro Zeiteinheit an jedem der beiden Plattenränder entstehende Wirbelmoment gleich dem pro Zeiteinheit durch das Wirbelsystem abtransportierten Wirbelmoment der einen oder anderen Drehrichtung sein muß. Dieses Wirbelmoment hat, wie eine einfache Überlegung ergibt, die Größe:

$$\frac{\zeta}{l}(U-u), \tag{1}$$

wenn $\zeta$ das Moment des einzelnen Wirbelfadens darstellt. Um andererseits das am Plattenrand entstehende Wirbelmoment zu berechnen, bemerken wir: Bei der Helmholtzschen unstetigen Potentialbewegung ist im „toten Wasser" hinter der Platte (diese als feststehend gedacht) die Geschwindigkeit 0, an der von der Platte ausgehenden „freien" Oberfläche ist sie $U$, also ist der Geschwindigkeitssprung an der Unstetigkeitsfläche $U$ (vgl. Fig. 1). Zerlegen wir die Unstetigkeitsfläche in ihre Elemente $df$, die wir als Wirbelfäden auffassen, und bilden das Geschwindigkeitsintegral auf geschlossenem Wege um solch einen Wirbelfaden $df$ herum (vgl. Fig. 1), so finden wir, daß sein Moment $U \cdot df$ beträgt. Ferner ist dieses Element $df$ keineswegs in Ruhe relativ zur Platte, denn dann hätten wir im toten Wasser die Geschwindigkeit $-\frac{U}{2}$, außen $+\frac{U}{2}$. Das Element entfernt sich vielmehr auf der Unstetigkeitsfläche mit der Geschwindigkeit $\frac{U}{2}$ von der Platte. Wir schließen daraus: das pro Zeiteinheit am Plattenrande entstehende Wirbelmoment ist

$$U \cdot \frac{U}{2}. \tag{2}$$

Wir erhalten aus (1) und (2) die Gleichung:

$$U \cdot \frac{U}{2} = \frac{\zeta}{l}(U-u). \tag{3}$$

## 2. Bedingung für den Wirbelabstand.

Eine zweite Beziehung folgt daraus, daß es eine gewisse Wassermenge gibt (vgl. Fig. 2), die stets innerhalb der beiden Wirbelreihen vorwärts

1) Vgl. etwa Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik, IV, § 76, S. 113.

2) In Fig. 1 sind die Geschwindigkeiten ($w = u - iv$) zum Teil in doppelter Weise eingetragen: Die eingeklammerten Angaben beziehen sich auf Geschwindigkeiten relativ zur Platte, die nicht eingeklammerten auf Geschwindigkeiten relativ zur Flüssigkeit im Unendlichen.

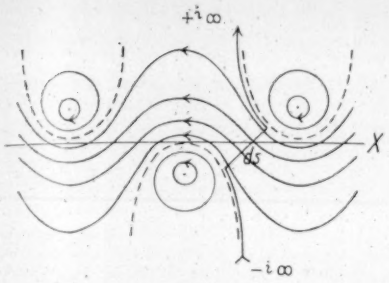



Fig. 2.

geschoben wird. Während die Flüssigkeit außerhalb der Wirbelstraße im Mittel in Ruhe ist (d. h. ein Flüssigkeitsteilchen entfernt sich hier im Laufe der Zeit nicht beliebig weit von seinem Anfangsort), fließt innerhalb der Straße ein kontinuierlicher Flüssigkeitsstrom vorwärts. Die in diesem Strom beförderte Wassermenge muß gleich derjenigen sein, die durch die bewegte Platte ständig nach vorne verdrängt wird. Letztere beträgt $U \cdot d$.

Um erstere zu berechnen, schreiben wir nach Kármán das komplexe Potential der Wirbelströmung an:

$$\chi = \frac{i\zeta}{2\pi} \lg \frac{\sin (z_0 - z)\frac{\pi}{l}}{\sin (z_0 + z)\frac{\pi}{l}}, \qquad (4)$$

$$z_0 = \frac{l}{4} + \frac{hi}{2}$$ ($h$ Abstand der beiden Wirbelreihen).

$z = x + iy$ (die $X$-Achse läuft, wie in Fig. 1 gezeichnet, parallel den Wirbelreihen und halbiert den Raum zwischen denselben). Um die gesuchte Wassermenge zu erhalten, integrieren wir auf einem an sich willkürlichen Wege vom Linienelement $ds$ ($u$ Geschwindigkeitsvektor, $w = u - iv$, $J$ bedeutet „Imaginärer Teil von"):

$$\int_a^b u_n\, ds = \int_a^b J(w\, dz) = J \int_a^b \frac{d\chi}{dz} dz = J(\chi)_a^b.$$

Die Grenzen $a$, $b$ des Integrals sind die beiden die gesuchte Wassermenge begrenzenden Stromlinien (in Fig. 2 punktiert), wobei die besondere Lage der Punkte $a$, $b$ auf den Stromlinien belanglos ist. Nun sind in unserem Falle die begrenzenden Stromlinien die einzigen, die (in der $Y$-Richtung) ins Unendliche reichen. Wir erstrecken also das Integral einfach von $z = +i\infty$ nach $z = -i\infty$. In Fig. 2 ist der Integrationsweg von $-i\infty$ entlang einer punktierten Stromlinie in die Nähe der Wirbel geführt, dann quer über das Strombett und von da wieder entlang der Grenzstromlinie nach $+i\infty$. Die pro Zeiteinheit durch den Strom gehende Flüssigkeitsmenge wird demnach:

$$J(\chi_{+i\infty} - \chi_{-i\infty}).$$

Nun ist nach (4):

$$\chi_{\alpha+\beta i} = \frac{i\zeta}{2\pi} \lg \frac{e^{i\frac{\pi}{l}\left(\frac{l}{4}+\frac{hi}{2}-\alpha-\beta i\right)} - e^{-i\frac{\pi}{l}\left(\frac{l}{4}+\frac{hi}{2}-\alpha-\beta i\right)}}{e^{i\frac{\pi}{l}\left(\frac{l}{4}+\frac{hi}{2}+\alpha+\beta i\right)} - e^{-i\frac{\pi}{l}\left(\frac{l}{4}+\frac{hi}{2}+\alpha+\beta i\right)}}$$

Daraus für:

$\beta \to \infty$, $\alpha = 0$ ($\alpha$ geht nicht in den imaginären Teil von $\chi$ ein)

$$\chi_{+i\infty} = \frac{i\zeta}{2\pi} \lg \left(-e^{+\frac{i\pi}{2}-\frac{h}{l}\pi}\right) = -\frac{3\zeta}{4} - \frac{i\zeta h}{2l},$$

$$\chi_{-i\infty} = \frac{i\zeta}{2\pi} \lg \left(-e^{-\frac{i\pi}{2}+\frac{h}{l}\pi}\right) = -\frac{\zeta}{4} + \frac{i\zeta h}{2l}.$$

Also wird die Flüssigkeitsmenge (das Vorzeichen lassen wir außer acht, da es uns nur auf den absoluten Betrag ankommt):

$$|J(\chi_{+i\infty} - \chi_{-i\infty})| = \frac{\zeta \cdot h}{l}. \qquad (5)$$

Wir erhalten daraus als zweite Beziehung:

$$U \cdot d = \frac{\zeta \cdot h}{l}. \qquad (6)$$

### 3. Schlußfolgerung.

Zur numerischen Auswertung von (3) und (6) benutzen wir noch die von Kármán l. c. angegebenen Beziehungen:

$$\frac{\zeta}{l\sqrt{8}} = u \qquad (7)$$

$$\text{und } \frac{h}{l} = 0{,}283\cdots \qquad (8)$$

Aus Gleichung (3) folgt dann:

$$\tfrac{1}{2}U^2 = u \cdot \sqrt{8}\,(U - u),$$

$$1 = 2 \cdot \sqrt{8} \cdot \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right),$$

$$\frac{u}{U} = 0{,}229. \qquad (9)$$

Die andere Wurzel $\frac{u}{U} = 0{,}771$ ist aus einem sogleich anzugebenden Grunde auszuschließen.

Gleichung (6) geht wegen (7) und (8) über in:

$$U \cdot d = u \cdot \sqrt{8} \cdot l \cdot 0{,}283.$$

Daraus folgt nach (9):

$$\frac{l}{d} = \frac{1}{\sqrt{8} \cdot 0{,}283 \cdot 0{,}229} = 5{,}45; \qquad (10)$$

$$\frac{h}{d} = 1{,}54. \qquad (11)$$

Die andere Wurzel für $\frac{u}{U}$ würde einen viel kleineren Wert für $\frac{l}{d}$ und $\frac{h}{d}$ ergeben. Da aber die Diskontinuitätsflächen der Potentialströmung nach außen gerichtet sind, so ist es sehr verständlich, daß diese zweite Möglichkeit nicht realisierbar ist.

Kármán gibt (l. c.) als empirische Werte an:

$$\frac{u}{U} = 0{,}20; \quad \frac{l}{d} = 5{,}5.$$

Als Wert für den spezifischen Widerstandskoeffizienten $\psi_w$, definiert durch:

$$W = \psi_w \cdot L \cdot d \cdot U^2 \cdot \varrho$$

($L$ = Länge der Platte senkrecht zur Zeichenebene, $\varrho$ = Dichte der Flüssigkeit),

ergibt sich aus den theoretischen Zahlen für $\frac{u}{U}$ und $\frac{l}{d}$:

$$\psi_w = 0{,}90.$$

Auch dieser Wert scheint mit neueren Messungen in bester Übereinstimmung zu stehen.

München, Institut für theoretische Physik.

(Eingegangen 18. Juli 1922.)

Bemerkung zur vorstehenden Arbeit, von L. Prandtl.

Die von Herrn Heisenberg bereits erwähnten Einwände, die ich gegen seine Ansätze zu machen habe, seien im folgenden, da sie für die Leser der vorstehenden Arbeit von Interesse sein dürften, kurz formuliert:

1. Der Widerstand der Platte ist rund doppelt so groß wie der, den die Kirchhoffsche Formel liefert. Hinter der Platte herrschen kleine Geschwindigkeiten, also volum-konstanter Druck bis an die Kanten heran. Dem etwa doppelt so großen Druckabfall von der Mitte der Vorderseite bis zur Kante entspricht auch ein etwa verdoppeltes $\frac{U^2}{2}$; also ist die sekundliche Wirbelproduktion $= \alpha \frac{U^2}{2}$ zu setzen, wo $\alpha$ bei der ebenen Platte ungefähr $= 2$ ist (genau genommen ist auch die Bewegung auf der Rückseite der Platte von Einfluß auf die Wirbelproduktion, doch ist dieser Einfluß nur geringfügig).

2. Es ist nicht ausgeschlossen, daß ein merklicher Teil der positiven und negativen Wirbelmomente durch Vermischung in der turbulenten Zone hinter der Platte sich gegenseitig vernichtet und daher in dem abziehenden Wirbelsystem nicht mehr vorhanden ist. Ist der vernichtete Bruchteil $= \beta$, so wäre an Stelle von Gl. (3) zu setzen:

$$(1 - \beta)\, \alpha \frac{U^2}{2} = \frac{\xi}{l} (U - u).$$

3. Der Schluß, daß die zwischen den Wirbeln nach vorn geförderte Flüssigkeitsmenge gerade $= U \cdot d$ sein soll, ist nicht zwingend. Mit der Platte rückt in der als ruhend gedachten Flüssigkeit auch die Grenze des Wirbelgebiets vor, und auch dieser Platz muß durch die Strömung ausgefüllt werden. Durch eine Zusammenziehung des Wirbelgebiets bei der Formulierung der Wirbelreihe kann eine entgegengesetzte Wirkung eintreten, so daß also auch Gl. (6) mit einem unbestimmten Faktor, der größer oder kleiner als 1 sein kann, behaftet ist.

Meines Erachtens ist die an sich recht instruktive Heisenbergsche Rechnung nur geeignet, im Zusammenhalt mit den Versuchsergebnissen über die hier erwähnten Berichtigungszahlen Aufschlüsse zu liefern.

Göttingen, 29. Juli 1922.

## Die Verbiegungen in einzelnen Punkten unterstützter kreisförmiger Platten.

Von A. Nádai.

1. Im Folgenden werden die Formänderungen und die Spannungen kreisförmiger Platten angegeben, die durch Kräfte quer zu ihrer Ebene belastet und auf ihrem Umfang in einzelnen Punkten unterstützt sind. Bei einer dünnen ebenen Platte ist wegen ihrer geringen seitlichen Steifigkeit die Möglichkeit eines ungleichmäßigen Aufliegens auf den Rand und einer dadurch hervorgerufenen Vergrößerung des Durchhanges unter der Wirkung von seitwärts gerichteten Kräften leicht gegeben. Es dürfte von Interesse sein, einmal überhaupt die

größtmöglichen elastischen Verbiegungen von kreisförmigen Platten festzustellen[1]).

Die Ordinate der Fläche, nach der sich die Platte krümmt, wird mit $w$ bezeichnet. Für die Spannungsmomente $m_r$, $m_t$, $t$, für die Randscherkräfte $q_r$, $q_t$ werden ihre Ausdrücke in Polarkoordinaten $r$, $\varphi$[2]) benutzt:

Radial biegendes Moment

$$m_r = -N\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right)\right],$$

Tangential biegendes Moment

$$m_t = -N\left[\nu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right],$$

Drillungsmoment

$$t = -(1-\nu)N\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right),$$

radiale Scherkraft

$$q_r = -N\frac{\partial \Delta w}{\partial r} + \frac{\partial t}{r\partial \varphi},$$

tangentiale Scherkraft

$$q_t = -N\frac{1}{r}\frac{\partial \Delta w}{\partial \varphi} + \frac{\partial t}{\partial r}. \qquad (3)$$

(Die Konstante $N$ ist gleich $N = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$, wo $h$ die Dicke der Platte, $E$ ihre Elastizitätsziffer und $\nu$ die Querdehnungszahl bezeichnen.) In den Ausdrücken der Randscherkräfte sind die mit den Drillungsmomenten gleichberechtigten Ersatzscherkräfte $\frac{\partial t}{r\partial \varphi}$, $\frac{\partial t}{\partial r}$ einbegriffen. Wenn auf der Platte ein gleichmäßig verteilter Druck $p$ lastet, sind die Ordinaten ihrer elastischen Fläche $w$ gemäß der partiellen Differentialgleichung

$$\Delta\Delta w = \frac{p}{N} \qquad (4)$$

zu bestimmen. Bei der vorausgesetzten Unterstützungsart ist der Rand zwischen den Stützpunkten vollkommen frei. Der auf der Platte lastende Druck überträgt sich in einer Anzahl diskreter Punkte auf die Unterlage. Die Stützpunkte am Umfang des Kreises $r = a$ mögen die Zentriwinkel $\varphi = \gamma_1, \dots \gamma_k$ haben, die in ihnen übertragenen Stützreaktionen seien $P_1, \dots P_k$. Die Bedingungen der freien Randstützung sind

$$r = a \begin{cases} m_r = -N\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu\left(\frac{\partial w}{r\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial^2 \varphi}\right)\right] = 0, & (5) \\ q_r = -N\frac{\partial \Delta w}{\partial r} + \frac{\partial t}{r\partial \varphi} = 0, & (6) \end{cases}$$

mit der Maßgabe, daß letztere Bedingung mit Ausnahme der Punkte $r = a$, $\varphi = \gamma_1, \dots \gamma_k$ zu gelten habe. Das über den Randkreis genommene Integral der Randscherkräfte $q_r$ muß in der Umgebung eines Stützpunktes gleich der in ihm übertragenen Einzelkraft $P_i$ sein.

Die zuletzt geforderte Bedingung wird für eine konzentrierte Stützkraft $P_i$, welche im Punkte $r = a$, $\varphi = \gamma_i$ übertragen wird, durch die divergente Reihe

$$q_r = -\frac{P_i}{\pi a}\left(\tfrac{1}{2} + \sum_1^\infty \cos n\varphi_i\right), \quad \varphi_i = \varphi - \gamma_i, \qquad (7)$$

ausgedrückt, vermöge der nach Fejér[1]) der Ausdruck für eine konzentrierte Randkraft gegeben und eine Funktion der Veränderlichen $\varphi_i$ auf dem Kreisumfang dargestellt ist, deren Werte im Bereich $-\pi < \varphi_i < \pi$ mit Ausnahme des Punktes $\varphi_i = 0$ Null sind, sofern man die Reihe in bestimmter Art summiert. Im Punkt $\varphi_i = 0$, $\varphi = \gamma_i$ ist sie gegen $\infty$ divergent. Während anderen stetigen oder unstetigen Verteilungen der Randscherkräfte, welche der Wirkung von Einzelkräften nahe kommen, keine erkennbaren Gesetzmäßigkeiten in den Funktionen entsprechen, sind der Fejérschen Reihe bei den elastischen Flächen und den Spannungsmomenten einfache Funktionen zugeordnet.

Wir bezeichnen mit $P$ ohne Zeiger die Gesamtlast $\pi a^2 p$, welche die Platte aufzunehmen hat und setzen die Stützreaktionen

$$P_i = \lambda_i P. \qquad (8)$$

Das Gleichgewicht der auf dem Kreis $r = a$

---

1) Ihre Kenntnis fordert beispielsweise der Dampfturbinenbau. Der Wunsch, die Maschinenleistung der Dampfturbine zu steigern, hat es mit sich gebracht, daß man im Hinblick auf die absolute Betriebsfähigkeit in den letzten Jahren zu gewaltigen Einheiten angewachsenen Turbinen gezwungen ist, ihrer konstruktiven Durchbildung die weitgehendste Sorgfalt zuzuwenden. So ist beispielsweise die genaue Innehaltung des engen Spielraumes zwischen den Teilen der Leitvorrichtungen oder den Zwischenwänden, welche die einzelnen Druckstufen voneinander trennen und den rasch umlaufenden Radscheiben für die Betriebssicherheit erforderlich. Die Biegungsschwingungen der rotierenden Scheiben oder die nicht richtig abgeschätzten Verbiegungen der einem seitlichen Druck ausgesetzten Zwischenwände können die Ursache zum Streifen der Scheiben an den feststehenden Teilen bilden, durch welches die betroffenen Metallteile in kurzer Zeit bis zur Weißglut sich erhitzen müssen. Es braucht in diesem Zusammenhang nur an A. Stodolas „Dampf- und Gasturbinen" (vgl. in der eben erschienenen fünften Auflage auf S. 790 die Schilderung der auf derartige und ähnliche Mängel zurückgeführten gänzlichen Zerstörung zweier Einheiten von 35000 und einer schwereren Beschädigung einer Turbine von 25000 Kilowatt) und an die von E. Meißner (diese Zeitschr. 14, 343, 1913) und H. Reißner entwickelte Theorie der Elastizität der gewölbten Schalen mit Rotationssymmetrie erinnert zu werden.

2) S. Love, Elasticity oder A. Föppl, Vorl. üb. techn. Mechanik, Bd. 5.

1) Zur Darstellung einer Einzelkraft in der Theorie der Plattenbiegung verwendet wohl Mesnager (C. R. Paris, 1917, S. 600) erstmals diese Reihe. Vgl. auch K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, S. 455 u. 457, 1922.

angreifenden konzentrierten Kräfte $P_i$ verlangt $\sum \lambda_i \cos \gamma_i = 0$, $\sum \lambda_i \sin \gamma_i = 0$, $\sum \lambda_i = 1$. (9)

Der Ausdruck für $k$ konzentrierte Randkräfte $P_1, P_2, P_3, \dots P_k$, die in den Punkten $r = a$, $\varphi = \gamma_1, \dots \gamma_k$ angreifen, ist

$$q_r = -\frac{P}{\pi a}\left[\frac{1}{2}\sum_{i}^{k}\lambda_i + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i \cos n\gamma_i\right] \quad (10)$$

und der von $k$ konzentrierten Kräften $n$, die im Gleichgewichte mit einer gleichmäßig über dem Kreis $r = a$ verteilten Ringbelastung $P = \sum P_i$ stehen

$$q_r = -\frac{P}{\pi a}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i \cos n\gamma_i. \quad (11)$$

2. Die äußere Belastung der Platte bestehe entweder aus einem gleichförmig verteilten Druck $p$ oder aus einer Einzelkraft $P$ in der Mitte des Kreises. Ihre elastische Fläche $w$ kann aus zwei Anteilen zusammengesetzt werden

$$w'' = w' + w. \quad (12)$$

Hier bedeute $w'$ die verbogene Fläche der auf ihrem Umfang gleichmäßig aufliegenden Kreisplatte, die eine der vorgenannten Belastungen trägt

$$w' = \frac{P}{64\pi N}\left[\frac{(5+\nu)a^2 - 2(3+\nu)r^2}{1+\nu} + \frac{r^4}{a^4}\right]^2, \quad (13)$$

(gleichförmiger Druck $p$)

$$w' = \frac{P}{8\pi N}\left[\frac{3+\nu}{2(1+\nu)}(a^2 - r^2) - r^2 \ln\frac{a}{r}\right], \quad (14)$$

(Einzelkraft $P$ in der Mitte).

Dann rührt der zweite Anteil $w$ zur elastischen Fläche von einem System von transversalen Kräften her, das lediglich auf dem Umfang des Kreises $r = a$ verteilt ist. Dieses ist identisch mit dem Gleichgewichtssystem (11). Die Grenzbedingungen für $w$ lauten somit

$$r = a, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu\left(\frac{\partial w}{r\,\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right) = 0, \qquad q_r = -\frac{P}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i \cos n\gamma_i. \quad (15)$$

Ihnen kann durch den Ansatz[1])

$$w = a_0 + b_0\varrho^2 + a_1\varrho\cos\varphi + c_1\varrho\sin\varphi + b_1\varrho^3\cos\varphi + d_1\varrho^3\sin\varphi + \sum_{n=2}^{\infty}(a_n\varrho^n + b_n\varrho^{n+2})\cos n\varphi + \sum_{n=2}^{\infty}(c_n\varrho^n + d_n\varrho^{n+2})\sin n\varphi \quad (16)$$

genügt werden. Hier und im folgenden steht $\varrho$ für $\frac{r}{a}$ zur Abkürzung. Zur Bestimmung der Beiwerte $a_n$, $b_n$, stehen die Bedingungen (15) zur Verfügung. Wenn $n \geq 2$, sind, sofern

$$Q = Pa^2/2\pi(3+\nu)N$$

gesetzt wird

$$a_n = \left(1 + \frac{2(1+\nu)}{1-\nu}\cdot\frac{1}{n}\right)\frac{QA_n}{(n-1)n}, \qquad b_n = -\frac{QA_n}{n(n+1)}, \quad A_n = -\sum_{1}^{k}\lambda_i \cos n\gamma_i,$$
$$c_n = \left(1 + \frac{2(1+\nu)}{1-\nu}\cdot\frac{1}{n}\right)\frac{QB_n}{(n-1)n}, \qquad d_n = -\frac{QB_n}{n(n+1)}, \quad B_n = -\sum_{1}^{k}\lambda_i \sin n\gamma_i, \quad (17)$$

Wegen (9) sind

$$A_1 = B_1 = 0 \text{ und } b_1 = d_1 = 0,$$

ebenso ist auch $b_0 = 0$ anzunehmen.

Die drei Festwerte $a_0$, $a_1$, $c_1$ lassen sich aus den Grenzbedingungen nicht ermitteln, weil die zugehörigen Glieder in (16) nur die geometrische Orientierung der Fläche der verbogenen Platte bestimmen.

Die in vorstehenden Formeln enthaltene Lösung soll in ebensoviele Teilsummen zerlegt werden, als Stützstellen auf dem Rand vorhanden sind. Die Anregung zu dieser Zerlegung verdanke ich einer Bemerkung von Prof. L. Prandtl, der die Vermutung aussprach, daß sich die Rechnung für Gleichgewichtssysteme, in denen nur eine Einzelkraft nebst gleichmäßig verteilten Scherkräften vorkommt, einfacher gestalten würde. Zu diesem Zweck seien statt der obigen Konstanten $a_n$, $b_n$, $c_n$, $d_n$ die neuen

$$a_n = -\alpha_n\sum\lambda_i \cos n\gamma_i, \quad b_n = -\beta_n\sum\lambda_i \cos n\gamma_i$$
$$c_n = -\alpha_n\sum\lambda_i \sin n\gamma_i, \quad d_n = -\beta_n\sum\lambda_i \sin n\gamma_i \quad (18)$$

eingeführt, wobei auch $b_1$ und $d_1$ (die ja verschwinden sollen) nach diesem Schema angeschrieben sein dürfen. Aus dem Vergleich von (18) mit (17) folgt sodann, daß

$$\alpha_n = \left(1 + \frac{2(1+\nu)}{1-\nu}\cdot\frac{1}{n}\right)\frac{Q}{(n-1)n}, \qquad \beta_n = -\frac{Q}{(n+1)n}. \quad (19)$$

Wegen

$$\cos n\varphi\cos n\gamma_i + \sin n\varphi\sin n\gamma_i = \cos n(\varphi - \gamma_i) = \cos n\varphi_i$$

lassen sich je zwei Glieder der Reihen (16) zusammenziehen und Gl. (16) nimmt die einfachere Form

1) Vgl. z. B. Timpe, Diss. Göttingen, 1905.

$$w = a_0 + a_1 \varrho \cos\varphi + c_1 \varrho \sin\varphi - \beta_1 \varrho^3 \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cos\varphi_i - \sum_{n=2}^{\infty} (\alpha_n \varrho^n + \beta_n \varrho^{n+2}) \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cos n\varphi_i \quad (20)$$

an. Abgesehen von den drei ersten Gliedern, die keinen Spannungszustand darstellen, läßt sich $w$ in $k$ gleich aufgebaute Teillösungen $w_i$

$$w_i = -\lambda_i \left[ \beta_1 \varrho^3 \cos\varphi_i + \sum_{n=2}^{\infty} (\alpha_n \varrho^n + \beta_n \varrho^{n+2}) \cos n\varphi_i \right] \quad (21)$$

spalten. Es erübrigt sich noch, $\beta_1$ anzugeben. Berechnet man den Anteil, den die vor der Summe stehende Partikularlösung zur Scherkraft beiträgt, so ergibt sich

$$q_r = 2(3+\nu)\beta_1 N \lambda_i \cos\varphi_i / a^3 \quad (22)$$

und der Vergleich mit dem Gliede für $n = 1$ in Gl. (15) zeigt, daß

$$\beta_1 = -\frac{Pa^2}{2\pi(3+\nu)N} = -Q$$

ist. Die Teillösung $w_i$ ergibt auf dem Randkreis $r = a$, $\varrho = 1$,

$$m_r = -\frac{P_i}{\pi} \cos\varphi_i, \quad q_r = -\frac{P_i}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\varphi_i.$$

Das hier wieder auftretende Moment $m_r$ läßt sich durch den Spannungszustand

$$\lambda_i \beta_1 \varrho^3 \cos\varphi_i, \quad r = a \ldots m_r = \frac{P_i}{\pi} \cos\varphi_i$$

und

$$q_r = \frac{P_i}{\pi a} \cos\varphi_i$$

beseitigen. Was dann von $w_i$ (Gl. 21) verbleibt ist die elastische Fläche einer nach Fig. 1 durch

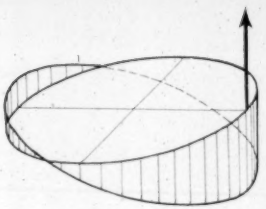


Fig. 1.

eine konzentrierte Randkraft belasteten kreisförmigen Platte, die mit einem nach einer Cosinuslinie verteilten System von Randscherkräften Gleichgewicht hält.

$$w_i^* = -\lambda_i \sum (\alpha_n \varrho^n + \beta_n \varrho^{n+2}) \cos n\varphi_i \quad (23)$$

3. Eine konzentrierte Randkraft. Spannungszustand von $w_i^*$. Bei der Angabe des Spannungszustandes in einem Punkt eines freien Plattenrandes wird ein eigenartiger Umstand zu berücksichtigen sein. Er wird durch den Ersatz der Drillungsmomente $t$ durch ihr statisch gleichberechtigtes System von Randscherkräften in die Spannungsermittlung hereingebracht. Nachdem durch das Anbringen der Ersatzscherkräfte $\frac{\partial t}{r \partial \varphi}$ an Stelle der Torsionsmomente $t$ die Spannungen auf dem Rand willkürlich abgeändert wurden, entstehen Zweifel, auf Grund von welcher Verteilung die Inanspruchnahme abzuschätzen sei. Man wird kaum fehlgehen, wenn man zu diesem Zweck zu den Biegungsspannungen $\sigma_r$, die Schubspannung $\tau$ (die Anlaß zu den Drillungsmomenten $t$ gibt) nach den Regeln der Zusammensetzung von Spannungen hinzunimmt, denn die $\tau$ treten in einiger Entfernung vom Rande wieder auf, gleichgültig, ob sie auf diesem unterdrückt sind oder nicht.

Die Funktion $w_i^*$, Gl. (23) nimmt nach Einführung der Werte für $\alpha_n$, $\beta_n$ die Form an

$$w_i^* = -\frac{P_i a^2}{2\pi(3+\nu)N} \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \frac{1}{(n-1)n} + \frac{2(1+\nu)}{1-\nu} \cdot \frac{1}{(n-1)n^2} - \frac{\varrho^2}{n(n+1)} \right] \varrho^n \cos n\varphi_i, \quad (24)$$

aus welcher Summe die Spannungsmomente

$$\left.\begin{aligned} m_r &= \frac{P_i}{2\pi(3+\nu)} \left[ (1-\nu)(1-\varrho^2) \sum \varrho^{n-2} \cos n\varphi + 2(1+\nu)(1-\varrho^2) \sum \frac{\varrho^{n-2}}{n} \cos n\varphi \right], \\ m_t &= -\frac{P_i}{2\pi(3+\nu)} \left[ (1-\nu)(1-\varrho^2) \sum \varrho^{n-2} \cos n\varphi + 2(1+\nu)(1+\varrho^2) \sum \frac{\varrho^{n-2}}{n} \cos n\varphi \right], \\ t &= -\frac{P_i}{2\pi(3+\nu)} \left[ (1-\nu)(1-\varrho^2) \sum \varrho^{n-2} \sin n\varphi + 2(1+\nu) \sum \frac{\varrho^{n-2}}{n} \sin n\varphi \right]. \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

folgen. Der überflüssig gewordene Zeiger $i$ bei $\varphi_i$ wurde hier fortgelassen. Die hier vorkommenden Summen sind (für $0 < \varphi < 2\pi$), der reelle und der imaginäre Teil der nachfolgenden Reihen

$$\sum_2 \varrho^{n-2} e^{ni\varphi} = \frac{1}{\varrho^2} \sum_2 \zeta^n = \frac{\zeta^2}{\varrho^2 (1-\zeta^2)} = \frac{e^{i(2\varphi-\psi'')}}{\varrho''}, \tag{26}$$

$$\sum_2 \frac{\varrho^{n-2} e^{ni\varphi}}{n} = \frac{1}{\varrho^2} \sum_2 \frac{\zeta^n}{n} = \frac{-1}{\varrho^2} \left[\zeta + \ln(1-\zeta)\right] = -\frac{e^{i\varphi}}{\varrho} - \frac{\ln \varphi'' - i\psi''}{\varrho^2}, \tag{27}$$

der komplexen Veränderlichen

$$\zeta = \varrho e^{i\varphi}, \quad 1+\zeta = \zeta' = \varrho' e^{i\varphi'}, \quad 1-\zeta = \zeta'' = \varrho'' e^{i\varphi''}, \tag{28}$$

$(i = \sqrt{-1})$, $\psi' = \varphi'$, $\psi'' = 2\pi - \varphi''$.

Die geometrische Bedeutung der Strecken $\varrho$, $\varrho'$, $\varrho''$ und Winkel $\varphi$, $\varphi'$, $\varphi''$, $\psi'$, $\psi''$ ist aus

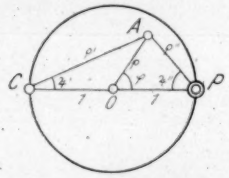



Fig. 2.

der Fig. 2 zu ersehen, in der die kreisförmige Platte mit dem Halbmesser 1 gezeichnet ist. $P$ ist die Stelle der konzentrierten Randkraft, $A$ ein beliebige Punkt mit den Koordinaten $\varrho\varphi$, $\varrho''$ die Entfernung $PA$, $\psi''$ der Winkel $OPA$. Außer $P$ wirkt auf den Kreis $\varrho = 1$ eine gleichmäßige und eine nach einer Cosinuslinie verteilte Scherkraft.

Die geschlossenen Ausdrücke für die Spannungsmomente sind auf den Geraden $\varphi = 0$ $(OP)$, bzw. $\varphi = \pi$ $(OC)$ (das obere Zeichen gilt für $\varphi = 0$, das untere für $\varphi = \pi$)

$$\left.\begin{aligned} m_r &= \frac{P_i}{2\pi(3+\nu)}\left[(1-\nu)(1\pm\varrho) - 2(1+\nu)\frac{1-\varrho^2}{\varrho^2}\left(\varrho \pm \ln(1\mp\varrho)\right)\right], \\ m_t &= \frac{P_i}{2\pi(3+\nu)}\left[-(1-\nu)(1\pm\varrho) + 2(1+\nu)\frac{1+\varrho^2}{\varrho^2}\left(\varrho \pm \ln(1\mp\varrho)\right)\right], \quad t = 0 \end{aligned}\right| \tag{29}$$

und auf der Geraden $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$\left.\begin{aligned} m_r &= \frac{P_i}{2\pi(3+\nu)}\left[-(1-\nu)\frac{1-\varrho^2}{1+\varrho^2} - (1+\nu)\frac{1-\varrho^2}{\varrho^2}\ln(1+\varrho^2)\right], \\ m_t &= \frac{P_i}{2\pi(3+\nu)}\left[(1-\nu)\frac{1-\varrho^2}{1+\varrho^2} + (1+\nu)\cdot\frac{1-\varrho^2}{\varrho^2}\ln(1+\varrho^2)\right], \\ t &= \frac{-P_i}{2\pi(3+\nu)}\left[(1-\nu)\frac{1-\varrho^2}{1+\varrho^2} + 2(1+\nu)\cdot\frac{\operatorname{arctg}\varrho - \varrho}{\varrho^2}\right], \end{aligned}\right| \tag{30}$$

schließlich auf dem Umfang des Kreises $r = a$, $(\varrho = 1)$

$$m_r = 0, \quad m_t = \frac{2(1+\nu)P_i}{\pi(3+\nu)}\left[\cos\varphi + \ln 2\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|\right], \quad t = \frac{(1+\nu)P_i}{\pi(3+\nu)}\left[\sin\varphi - \frac{\pi}{2} + \frac{\varphi}{2}\right]. \tag{31}$$

4. Der in den Endpunkten eines Durchmessers unterstützte Kreis. Als Anwendung der im Abschnitt 2 ins Auge gefaßten Spannungszustände sei im Anschluß die elastische Fläche einer kreisförmigen Platte angegeben, die durch einen gleichmäßigen Druck $p$ oder auch durch eine Einzelkraft $P$ in ihrer Mitte belastet ist und in den Endpunkten eines Durchmessers aufliegt. Die Auflagerpunkte seien $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$. Wir haben zwei Flächen $w_1$, $w_2$ der eben behandelten Art zu überlagern. $w_1$ rühre vom Stützdruck $P_1 = P/2$ im Punkte $\varphi = 0$, $w_2$ von $P_2 = P/2$ im Punkte $\varphi = \pi$ her, unter $P$ die Gesamtlast der Platte verstanden. Die elastische Fläche $w$ ist gemäß Gl. (12) die Summe

$$w'' = w' + w_0 + w_1 + w_2, \tag{32}$$

($w'$ ist eine der Flächen (13) oder (14), $w_0$ eine Konstante, die zur Darstellung des Biegungspfeiles hinzugefügt werden mußte). In der Summe $w_1 + w_2$ heben sich die Glieder mit den ungeraden Zahlen $n$ fort, während die mit den geraden doppelt vorkommen, somit wird

$$w_1 + w_2 = -\frac{Pa^2}{2\pi(3+\nu)N}\sum_2^\infty \left[\frac{1}{(n-1)n} + \frac{2(1+\nu)}{1-\nu}\cdot\frac{1}{(n-1)n^2} - \frac{\varrho^2}{n(n+1)}\right]\varrho^n \cos n\varphi \quad (n = 2, 4, 6, \ldots). \tag{33}$$

Aus der Bedingung $\begin{cases}\varrho = 1,\\ \varphi = 0,\end{cases}$ $w_0 + w_1 + w_2 = 0$ folgt für

$$w_0 = \frac{Pa^2}{2\pi(3+\nu)N}\left[2\ln 2 - 1 + \frac{2(1+\nu)}{1-\nu}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)n^2}\right], \quad \varrho = 1 \tag{34}$$

während für $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$w_0 + w_1 + w_2 = w_0 + \frac{Pa^2}{2\pi(3+\nu)N}\left[\ln 2 - 1 + \frac{2(1+\nu)}{1-\nu}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{(n-1)n^2}\right] \tag{35}$$

ist.

Die hier vorkommenden Summen sind

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)n^2} = \ln 2 - \frac{\pi^2}{24}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{(n-1)n^2} = \ln 2 - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{24},$$

sofern $n = 2, 4, 6, \ldots$ Wenn die Querdehnungszahl $\nu = 1/4$ genommen wird, sind

$$w_0 = 0{,}065\,\frac{Pa^2}{N} = 0{,}73\,\frac{Pa^2}{Eh^3}, \qquad (w)_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 0{,}118\,\frac{Pa^2}{N} = 1{,}33\,\frac{Pa^2}{Eh^3}. \tag{36}$$

Unter einer auf dem äußeren Rand $r = a$ verteilten Ringbelastung $P$ senkt sich der freie Rand in der Mitte zwischen den beiden Stützpunkten beiläufig um den doppelten Betrag, als die Mitte des Kreises. Die zur elastischen Fläche

$$w_1 = w_0 + w_1 + w_2 \tag{37}$$

gehörigen Spannungsmomente sind auf der Verbindungslinie der Stützpunkte

$$m_r = \frac{P}{2(3+\nu)\pi}\left[1 - \nu - (1+\nu)\frac{1-\varrho^2}{\varrho^2}\ln(1-\varrho^2)\right], \quad m_t = \frac{P}{2(3+\nu)\pi}\left[1 - \nu - (1+\nu)\frac{1+\varrho^2}{\varrho^2}\ln(1-\varrho^2)\right], \quad t = 0 \tag{38}$$

auf der dazu senkrechten Geraden $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$m_r = \frac{-P}{2(3+\nu)\pi}\left[(1-\nu)\frac{1-\varrho^2}{1+\varrho^2} + (1+\nu)\frac{1-\varrho^2}{\varrho^2}\ln(1+\varrho^2)\right], \quad m_t = \frac{P}{2(3+\nu)\pi}\left[(1-\nu)\frac{1-\varrho^2}{1+\varrho^2} + (1+\nu)\frac{1+\varrho^2}{\varrho^2}\ln(1+\varrho^2)\right], \quad t = 0 \tag{39}$$

und auf dem äußersten Kreisumfang

$$m_r = 0, \quad m_t = \frac{(1+\nu)P}{(3+\nu)\pi}\ln 2\,|\sin\varphi|, \quad t = -\frac{(1+\nu)P}{2(3+\nu)\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \cdots (t \text{ für } 0 < \varphi < \pi). \tag{40}$$

Die zugehörigen Momentkurven sind in der Fig. 3 maßstäblich wiedergegeben. Die Platte

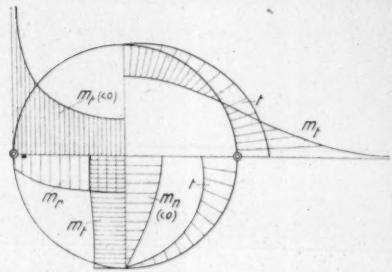



Fig. 3.

wird am stärksten in der Umgebung der beiden Stützpunkte beansprucht. Dort werden die Spannungen sogar unendlich groß, wenn die Stützkräfte nicht in endlichen Flächen wirkend vorausgesetzt werden.

Mit den vorstehenden Angaben ist der Biegungsfall der in den Endpunkten eines Durchmessers unterstützten Kreisplatte unter Wirkung eines Druckes $p$ oder einer Einzelkraft in der Mitte erledigt. Er geht aus $w_1$ (Gl. 37) nach Überlagerung des einen, oder des andern der durch die Gl. (13) bzw. (14) gegebenen Biegungszustände $w'$ gemäß (32)

$$w'' = w' + w_1 \tag{41}$$

hervor. Dabei heben sich die gleichmäßigen Stützkraftverteilungen beider Zustände auf und der Rand des Kreises wird frei.

Es ergeben sich jetzt die Durchbiegungen im Kreismittelpunkt

$r = 0$, $w = 0{,}269\,\frac{pa^4}{N}$ (gleichförmiger Druck),

$$w = 1{,}31\,\frac{Pa^2}{Eh^2} \quad \text{(Einzelkraft)}, \tag{42}$$

in der Mitte des freien Randes $\left(\varphi = \frac{\pi}{2},\ \varrho = 1\right)$:

$$r = a,\ w = 0{,}371\,\frac{pa^4}{N} \quad \text{(gleichförmiger Druck)},$$

$$w = 1{,}33\,\frac{Pa^2}{Eh^3} \quad \text{(Einzelkraft)}, \tag{43}$$

während eine auf ihrem Rand überall gleichmäßig und frei aufliegende Kreisplatte in ihrem Mittelpunkt die Durchbiegung

$$r = 0,\ w = 0{,}0656\,\frac{pa^4}{N} \quad \text{(gleichförmiger Druck)},$$

$$w = 0{,}582\,\frac{Pa^2}{Eh^3} \quad \text{(Einzelkraft)} \tag{44}$$

hat.

5. Drei und mehr Stützpunkte. Torsionsbeanspruchung einer kreisförmigen Scheibe. Wenn die Platte in mehr als zwei Punkten unterstützt ist, sind ebensoviel Lösungen $w_i^*$ (Gl. 24) als Stützpunkte vorhanden sind, anzusetzen. Jede ist mit der Stärke der Auflagerkraft zu nehmen. Bei drei Stützpunkten reichen die Gl. (9) zur Angabe der Stützkräfte aus, in den statisch unbestimmten Fällen mit mehr als 3 Stützpunkten entsprechen jedem Wertesystem der $\lambda_i$, das den 3 Gl. (9) genügt, mögliche Deformationszustände. Die noch fehlenden Bestimmungsgleichungen folgen beispielsweise durch Angabe der Verschiebungen der Stützpunkte.

Für drei symmetrisch gelegene Auflagerpunkte, die ein gleichseitiges Dreieck bilden, erhält man die Lösung $w_1$ oder die elastische Fläche, nach der sich ein auf seinem Rande belasteter Kreis unter einer gleichmäßig verteilten Ringbelastung wölbt,

$$w_1 = w_0 - \frac{Pa^2}{2\pi(3+\nu)N}\sum_{(n=3,\,6,\,9,\,\ldots)}\left[\frac{1}{(n-1)\,n} + \frac{2(1+\nu)}{1-\nu}\cdot\frac{1}{(n-1)\,n^2} - \frac{\varrho^2}{n(n+1)}\right]\varrho^n\cos n\varphi, \tag{45}$$

Ihre Durchbiegung in der Mitte ist

$$w_0 = 0{,}0153\,\frac{Pa^2}{N} = 0{,}172\,\frac{Pa^2}{Eh^3} \tag{46}$$

und in der Mitte zwischen zwei Stützpunkten auf dem Rand

$$= 0{,}307\,\frac{Pa^2}{Eh^3}. \tag{47}$$

Nach Überlagerung einer der Flächen $w'$ ergeben sich die entsprechenden $w'' = w_1 + w'$. So weist eine in der Mitte durch eine Einzelkraft $P$ belastete Kreisscheibe, die in drei Randpunkten unterstützt ist, welche ein gleichseitiges Dreieck bilden, die Durchbiegung in der Mitte auf

$$0{,}754\,\frac{Pa^2}{Eh^3}. \tag{48}$$

Ihr Rand hängt in der Mitte zwischen zwei Auflagerpunkten um den Betrag

$$0{,}307\,\frac{Pa^2}{Eh^3} \tag{49}$$

durch.

Wir wollen schließlich die Durchbiegungen einer durch einen gleichmäßigen Druck $p$ belasteten Kreisplatte angeben, die in den Ecken eines in den Kreis eingeschriebenen Rechtecks aufruht. Je zwei Stützpunkte, die auf einer Diagonalen liegen, haben die gleiche Stützkraft aufzunehmen:

$$\left.\begin{aligned} P_1 = P_2 = P_I,\quad P_3 = P_4 = P_{II},\\ 2P_I + 2P_{II} = \pi a^2 p. \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Die elastische Fläche ist hier offenbar die Summe von zwei Biegungszuständen $w_I$ und $w_{II}$ der Art Gl. (37), die mit der Stärke der entsprechenden Stützreaktionen $P_I$ bzw. $P_{II}$ zu nehmen sind und der Fläche $w'$, Gl. (13). Jedem Wertepaar $P_I$, $P_{II}$, das der Gleichgewichtsbedingung genügt, entspricht ein möglicher Formänderungszustand einer durch den Druck $p$ im Innern belasteten Platte mit einem freien Rand, die in den vier Punkten aufruht. Wenn diese beispielsweise die Ecken eines in den Kreis eingeschriebenen Quadrates bilden und in einer Ebene liegen, folgt aus den Zahlenangaben (42—44) der Durchhang

$$0{,}083\,\frac{pa^4}{N} \tag{51}$$

in der Mitte.

Bezeichnet man mit $\varphi_1$ und mit $\varphi_2$ die Zentriwinkel, die von zwei benachbarten Ecken des Rechtecks gerechnet werden, und setzt man

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 2\varphi,\quad \varphi_1 - \varphi_2 = 2\alpha$$

und

$$P_I = P_{II} = P^*,$$

so wird durch

$$w^* = w_I + w_{II} = -\frac{2P^*a^2}{(3+\nu)\pi N}\sum_{(n=2,\,4,\,6,\,\ldots)}\left[\frac{1}{(n-1)\,n} + \frac{2(1+\nu)}{1-\nu}\cdot\frac{1}{(n-1)\,n^2} - \frac{\varrho^2}{n(n+1)}\right]\varrho^n\cos n\varphi\cos n\alpha, \tag{52}$$

die Deformation einer Kreisscheibe unter einer Ringbelastung beschrieben, die durch vier gleich große Auflagerkräfte abgefangen wird.

Setzt man hingegen

$$P_I = P^{**}, \quad P_{II} = -P^{**},$$

so hebt sich die Ringbelastung wieder fort, es verbleibt

$$w^{**} = w_I + w_{II} = \frac{2P^{**}a^2}{(3+\nu)\pi N} \sum \left[ \frac{1}{(n-1)n} + \frac{2(1+\nu)}{1-\nu} \cdot \frac{\varrho^2}{(n-1)n^2 \quad n(n+1)} \right] \varrho^n \sin n\varphi \sin nx, \quad (n = 2, 4, 6, \ldots) \tag{53}$$

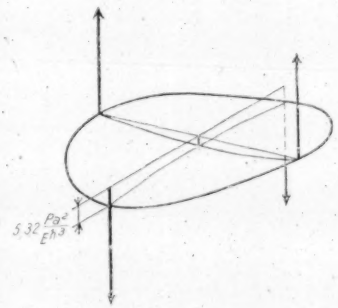



Fig. 4.

die Torsionsbeanspruchung einer Kreisscheibe durch vier gleiche Randeinzelkräfte $P^{**}$. Der Zustand $w_I + w_{II}$ läßt sich also auch vermöge der beiden Zustände $w^*$ und $w^{**}$ ausdrücken.

Läßt man schließlich die Kräfte $p^{**}$ paarweise zusammenrücken, ohne daß sich ihr Moment ändert, so entsteht die reine Torsionsbeanspruchung einer kreisförmigen Platte durch zwei konzentrierte Randmomente $M$, die an den Enden eines Durchmessers angreifen. Ihre elastische Fläche

$$w^{**} = \frac{Ma}{(3+\nu)\pi N} \sum \left( \frac{1}{n-1} - \frac{\varrho^2}{n+1} + \frac{2(1+\nu)}{1-\nu} \cdot \frac{1}{(n-1)n} \right) \varrho^n \sin n\varphi, \quad (n = 2, 4, 6, \ldots) \tag{54}$$

ist identisch mit der Funktion

$$w^{**} = \frac{Ma}{(3+\nu)(1-\nu)\pi N} \left[ 2\varrho \sin\varphi \ln \frac{\varrho'}{\varrho''} + (1+\nu)(\psi'\varrho' \cos\psi' - \psi''\varrho'' \cos\psi'') \right]. \tag{55}$$

(Die Bedeutung der Strecken $\varrho$, $\varrho'$ $\varrho''$ und Winkel $\psi$, $\psi'$ $\psi''$ ist in der Fig. 2 angegeben.)

6. Versuche mit kreisförmigen Glasplatten. Die Grundlagen der Kirchhoffschen Theorie der Plattenbiegung und die Grenzen ihrer Anwendbarkeit sind von Physikern und von Ingenieuren nur selten einer genaueren Überprüfung durch den Versuch unterworfen worden.

Die in zahlreichen Veröffentlichungen bekannt gewordenen verdienstvollen Versuche von C. v. Bach über die Widerstandsfähigkeit ebener Wandungen verfolgten einen andern Zweck, indem sie zur Aufstellung brauchbarer Normen für die Festigkeit gedient haben. Elastizitätsversuche, die einen Vergleich mit der Theorie anstrebten, sind mit kreisförmigen Platten von A. Föppl[1]) gemacht worden. An den in der Mitte und exzentrisch durch eine Einzelkraft belasteten, frei aufliegenden Platten zeigte sich eine recht gute Übereinstimmung der theoretisch verlangten mit der wirklichen Gestalt der durchgebogenen Platte, die absoluten Werte des aus den Biegungsversuchen abgeleiteten Elastizitätsmoduls standen aber nicht in befriedigender Übereinstimmung mit dem aus anderen Versuchen bestimmten Wert.

Für Elastizitätsversuche wird man Formänderungszustände von Platten heranziehen, die sich genau berechnen lassen und die zu Grenzbedingungen längs den Plattenrändern gehören, deren scharfe Einhaltung im Versuch keine Schwierigkeiten bereitet. Die zahlreichen bekannten Lösungen der Plattengleichung mit stetig verteilten Auflagerkräften eignen sich hierzu wenig, weil die in der Theorie gemachte und in der Mehrzahl der in den Anwendungen vorkommenden Biegungsfällen zutreffende Voraussetzung kleiner Durchbiegungen im Vergleich zur Plattendicke zur Folge hat, daß geringe Ungenauigkeiten bei der Herstellung der Auflagerflächen oder geringfügige Verschiebungen des Randes die Grenzbedingungen beeinflussen. Zu einer Überprüfung der Voraussetzungen der Theorie werden sich deshalb die zu einem statisch bestimmten System der Auflagereaktionen gehörenden Biegungsfälle von elastischen Platten eignen. Für diesen Zweck kommen in Betracht der Belastungsfall einer rechteckigen Platte durch vier in ihren Ecken angreifenden Einzelkräfte, die gleich, jedoch paarweise entgegengesetzt gerichtet sind, an dem ich vor einigen Jahren Versuche anstellte[2]) und die hier behandelten Formänderungszustände in zwei oder höchstens in drei Punkten unterstützter kreisförmiger Platten. Über einige Biegungsversuche mit in statisch bestimmter Art unterstützten kreisförmigen Platten aus Glas soll hier

1) Mitteil. aus dem mech.-techn. Laboratorium der Techn. Hochschule München 1900.

2) Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Heft 170/171, 1915.

berichtet werden. Sie sind im Institut für angewandte Mechanik der Universität Göttingen im Anschluß an später zu besprechende Versuche mit kreisförmigen Stahlplatten von großer Ausbiegung gemacht worden. Dem Direktor des Instituts, Herrn Prof. Ludwig Prandtl dankt der Verfasser herzlich für ihre liebenswürdige Förderung, der Jubiläumsstiftung der Deutschen Industrie für die freundliche Gewährung der Mittel. Außer mit den in einzelnen Punkten unterstützten Platten sind Versuche mit auf ihrem Umfang frei aufliegenden Kreisplatten gemacht worden, die darüber Aufschluß geben, bis zu welchem Grade die der Rechnung zugrunde gelegten Grenzbedingungen zutreffen. Über die Verfolgung der von der technischen Praxis gestellten weiteren Fragen nach der Möglichkeit der Erweiterung der Kirchhoffschen Theorie der Plattenbiegung auf die Formänderungszustände von elastischen Platten, deren Durchbiegungen nicht mehr klein im Verhältnis zu ihrer Dicke sind, soll an anderer Stelle berichtet werden. Als Belastung wurde die Einzelkraft in der Mitte gewählt. Die Ausübung und die Messung der Kraft geschah mit einer Tafelwage. Die kreisförmigen Platten wurden aus einer fehlerfreien, möglichst ebenen und gleich starken Scheibe Fensterglas mittels eines im Kreis geführten Diamanten herausgeschnitten. Ihre Dicke schwankte merklich (um einige Hundertstel Millimeter), weshalb eine Ausgleichung der Dickenmessung entlang des Umfanges vorgenommen wurde. Die Platten hatten einen Durchmesser von 204 mm, die Auflagerpunkte (einstellbare Spitzen aus Eisen) lagen auf einem Kreis von 200 mm Durchmesser. Ein durch drei Säulen gehaltener massiver Eisenring diente zur Befestigung der Eisenspitzen. Die Durchbiegung der Platte konnte mittels eines in Spitzen gelagerten leichten Fühlstiftes an jeder beliebigen Stelle der Platte beobachtet werden. Der Fühlstift übertrug seine Bewegung auf einen leichten Messinghebel von 45 mm Länge, dessen Verdrehung mit Spiegel und Fernrohr auf einer Skala beobachtet wurde. Die Übersetzung des Geräts war 1:50. Die Anbringung eines zweiten, festen Spiegels zur Ausschaltung des Fehlers einer möglichen Drehung der Versuchsanordnung erwies sich als überflüssig, desgleichen auch die Messung der Verschiebung der Auflagerpunkte, die innerhalb der Meßgenauigkeit keine Bewegungen zeigten. Die in der Mitte der Platte gemessenen Durchbiegungen bezogen sich auf die Ebene, in der die Auflagerpunkte lagen. Um die in zwei Punkten unterstützten Platten gegen das Kippen zu sichern, wurde bei dieser Unterstützungsart statt der einen Spitze eine kurze Schneide benutzt.

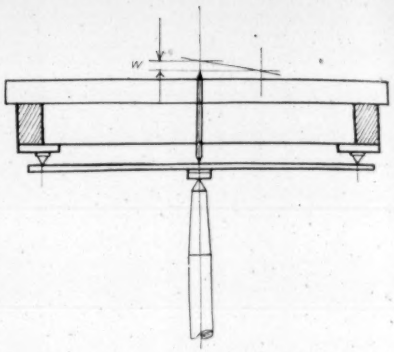



Fig. 5.

Der Elastizitätsmodul $E$ des Glases wurde ähnlich, wie dies bei den Versuchen von A. Föppl geschehen war, aus Biegungsversuchen mit schmalen Streifen ermittelt. Es wurden drei Streifen unter einer Einzelkraft in der Mitte und drei Streifen in reiner Biegung untersucht.

Die Biegungsversuche mit den Streifen, als auch mit den in zwei, beziehungsweise in drei Punkten unterstützten Kreisplatten zeigten praktisch eine völlige Linearität zwischen der Durchbiegung und der Kraft. Ein zeitlicher Einfluß, der bekanntlich bei Versuchen mit Glas festgestellt ist, machte sich während der kurzen und gleich gehaltenen Dauer zwischen der Anbringung der Kraft und der Ablesung der Deformation kaum bemerkbar.

Die Biegungsversuche mit den Glasstreifen ergaben für den Elastizitätsmodul

Biegung von 3 Streifen unter Einzelkraft

723000, 723000, 731000, Mittel 726000 kg/cm²

Reine Biegung von drei Streifen

730000, 728000, 733000, Mittel 730000 kg/cm²
Mittel aus Streifenversuchen: 728000 kg/cm².

Die Größe der Druckfläche, innerhalb der sich die Einzelkraft auf die Platte übertrug, war von keinem Einfluß auf den Biegungspfeil. Dies wurde durch Veränderung der Größe dieser Fläche unter Benutzung von Unterlagplättchen aus Gummi mit den Durchmessern von 18, 13, 8, 3 mm festgestellt.

Bei den Platten ergab sich eine systematische Abweichung der beobachteten Biegungspfeile von den berechneten, weil die Stützpunkte nicht auf dem Begrenzungskreis lagen. Die Korrektur wurde durch Beobachtung der Durchbiegung in der Mitte nach mehrmaligem Hineinrücken der 2 oder der 3 Auflagerpunkte und Extra-

polation der so entstandenen Werte auf den äußeren Rand bei jeder Platte besonders ermittelt. Der Einfluß, den die Vergrößerung des Durchmessers vom Auflagerpunktkreis auf den Biegungspfeil hatte, geht aus den folgenden Zahlen hervor.

Durchmesser des Kreises der 3 Auflagerpunkte:

18,02, 19,00, 20,00 cm.

Beobachteter Biegungspfeil in der Mitte für Einzelkraft $P = 1$ kg:

0,0161, 0,0191, 0,0220 cm.

Die Extrapolation dieser Werte auf den Randkreis vom Durchmesser 20,40 cm ergibt

$$f = 0{,}0232 \text{ cm}.$$

Der aus der Kirchhoffschen Theorie mit einer Querdehnungszahl $\nu = 1/4$ berechnete Biegungspfeil der in drei, in einem gleichseitigen Dreieck gelegenen Randpunkte unterstützten Kreisplatte (Gl. 48, S. 8) war

$$w = 0{,}754 \frac{Pa^2}{Eh^3},$$

woraus der Elastizitätsmodul

$$E = 713000 \text{ kg/cm}^2$$

sich ergibt. (Der Halbmesser des Randkreises war $a = 10{,}20$ cm, die mittlere Dicke der Platte betrug $h = 0{,}1677$ cm, die Einzelkraft hatte den Wert $P = 1$ kg.) Die in dieser Weise aus den Biegungsversuchen der in zwei und in drei Punkten unterstützten und in der Mitte durch eine Einzelkraft belasteten kreisförmigen Glasplatten ermittelten Werte der Elastisitätsziffer waren:

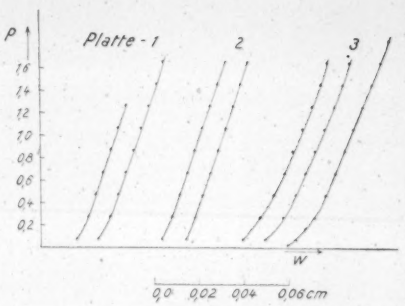



Fig. 6.

| | Platte 1 | Platte 2 | Platte 3 | |
|---|---|---|---|---|
| Platte liegt in zwei Randpunkten auf | 728 000 | 733 000 | 718 000 | Mittel 726 000 kg/cm² |
| Platte liegt in drei Randpunkten auf | 713 000 | 730 000 | 718 000 | Mittel 720 000 kg/cm² |

Mittel aus Plattenversuchen: 723 000 kg/cm².

Die Übereinstimmung der aus den Biegungsversuchen mit den Streifen und mit den kreisförmigen Platten nach der Kirchhoffschen Plattentheorie berechneten Durchbiegungen ist sehr befriedigend. Zum Vergleich ist nachzutragen, daß hier für die Poissonsche Zahl $\nu = 1/4$ der aus sonstigen Elastizitätsversuchen mit Glas bekannte Wert angenommen wurde. Die Formeln (34) und (42), (43) für den Biegungspfeil der in zwei, bzw. in drei Punkten unterstützten Kreisplatten hätten ohne weiteres gestattet, auch die Querdehnungszahl $\nu$ neben dem Elastizitätsmodul als eine unbekannte Materialkonstante zu betrachten und aus den Beobachtungen zu ermitteln. Wegen der guten Übereinstimmung der obigen Näherungszahlen für $E$ wurde von dieser genaueren Ausgleichung der Beobachtungen abgesehen.

Mit auf ihrem Umfang frei aufliegenden und in ihrer Mitte durch eine Einzelkraft belasteten Kreisplatten wurden an denselben Glasscheiben ebenfalls Versuche gemacht. Die Platten lagen auf einem kreisförmigen Grat auf, der in den Auflagerring eingedreht war. Eine Linearität zwischen den Durchbiegungen und der Kraft (vgl. die Zusammenstellung der Beobachtungen verschiedener Versuche in der Fig. 6) konnte hier bei kleinen Belastungen nicht beobachtet werden, zum Zeichen, daß sich die Platten erst allmählich an ihre Unterlage anlegten. Aus der Neigung der mit der steigenden Belastung schließlich sich einstellenden mittleren Geraden ergaben sich unter der Berücksichtigung einer geringfügigen Korrektur für den überstehenden Plattenrand von 2 mm Breite aus der Formel für den Biegungspfeil der frei aufliegenden Platte (Gl. 44)

$$0{,}582 \frac{Pa^2}{Eh^3}$$

die mittleren Werte des Elastizitätsmoduls

| | Platte 1 | Platte 2 | Platte 3 |
|---|---|---|---|
| $E =$ | 728 000 | 732 000 | 706 000 |

die mit Ausnahme des letzten Wertes ebenfalls nahe zum obigen Mittelwert liegen. (Die Platte 3 war, wie durch Abklopfen auf ihrer Unterlage festgestellt werden konnte, am wenigsten eben.)

Die Versuche mit freiaufliegenden Kreis-

platten aus Flußeisen von A. Föppl führten hingegen zu einem um einige Hundertstel kleineren Wert von $E$ als der Biegungsversuch mit einem Streifen. Eine der Ursachen für diese Abweichung liegt, soweit es sich um Versuche mit einer Einzelkraft handelt, in einer zunehmenden Störung des Spannungszustandes in der Umgebung einer konzentrierten Kraft[1]) Der zweite Grund ist, daß sich bei Eisen- und Stahlplatten wegen des hohen Wertes von $E$ der Einfluß einer ungleichmäßigen Auflage auf dem Rand stärker bemerkbar machen dürfte, als bei Glas. Dies klärt auch den scheinbaren Widerspruch auf, warum die ungleichmäßig aufliegenden Glasscheiben der letzten Versuchsreihe bei den höheren Lasten brauchbare Werte des Elastizitätsmoduls lieferten.

1) Schweizerische Bauzeitung 76, 257, 1920.

(Eingegangen 1. August 1922.)

# BESPRECHUNGEN.

**L. W. Weil, Neue Grundlagen der technischen Hydrodynamik.** gr. 8°. 219 S. München und Berlin, R. Oldenbourg. 1920. Geheftet M. 176.—, gebunden M. 216.—.

Verfasser behandelt im ersten Abschnitt die Strömung von Flüssigkeiten in Röhren, Kanälen, Stollen, Flußläufen usw. und schließt daran die Turbulenz. In den folgenden Abschnitten kommen die Probleme der Strömung in verengten, bzw. erweiterten Kanälen, des Ausflusses, der kreisenden Flüssigkeit, des hydraulischen Stoßes und der Kreiselräder zur Sprache, ohne indessen vollständig geklärt zu werden.

Was das Turbulenzproblem anbelangt, so gibt es hier viel vernünftigere Ansätze zu seiner Behandlung, als die, von denen Verfasser ausgeht. Ich mache nur auf die Theorie der Prandtlschen Grenzschichten aufmerksam, die inzwischen durch neuere Arbeiten von Kármán, Schiller und anderen eine wesentliche Förderung erfahren hat. Auch die Lösung des Ausflußproblems ist noch keineswegs als definitiv anzusprechen, so wie es Verfasser behandelt, da die Verteilung der Stromlinien, so wie sie aus einem Ansatz sich ergeben, noch nicht experimentell bestätigt ist. Auch kann ich der Behandlung der Kreiselräder nicht zustimmen, da die Zirkulation um die Schaufeln, die sich der sogenannten Potentialströmung in den Zwischenräumen überlagert, durch seine Betrachtung vollkommen ausgeschaltet ist.

Von neuen Grundlagen der technischen Hydrodynamik kann nicht die Rede sein. Trotzdem enthält das Buch allerlei Anregendes. H. Falkenhagen.

## Personalien.

**(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)**

**Ernannt:** Dr. K. Reidemeister, Privatdozent an der Universität Hamburg zum a. o. Professor der Mathematik an der Universität Wien, der a. o. Professor an der Universität Bonn Dr. Hans Meerwein zum ord. Professor der Chemie an der Universität Königsberg.

**Berufen:** Der a. o. Professor an der Universität München Dr. Friedrich Hartogs zum ord. Professor der Mathematik an der Universität Frankfurt a. M., der ord. Professor an der Technischen Hochschule Aachen Dr. Friedrich Trefftz zum ord. Professor für technische Mechanik an der Technischen Hochschule Dresden.

**Abgelehnte Berufung:** Der Honorarprofessor an der Universität München Dr. A. Schmauß hat den Ruf als ord. Professor der Meteorologie an die Universität Berlin abgelehnt (vgl. diese Zeitschr. 28, 256, 1922).

**In den Ruhestand:** Der ord. Professor für darstellende und projektive Geometrie an der Technischen Hochschule Stuttgart Dr. Rudolf Mehmke.

**Gestorben:** Der Erfinder des Telephons Dr. Alexander Graham Bell, der ord. Professor der Mathematik an der tschechischen technischen Hochschule in Brünn Dr. Matyás Lerch, der ord. Professor der Naturphilosophie an der Universität Wien Hofrat Dr. Alois Höfler, der ord. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule Aachen Geh. Regierungsrat Dr. Ernst Kötter, der Professor der angewandten Mathematik an der Universität Kristiania Dr. Axel Thun.

**Gesuche.**

**PHYSIKER**

**Dr. phil. nat.**

in selbständiger Industriestellung (Röntgentechnik), geschickter Experimentator, gute Zeugnisse, wünscht sich baldigst zu verändern. Angebote unter **S. H. 609** an den Verlag der Physikal. Zeitschrift (S. Hirzel), Leipzig, Königstraße 2.

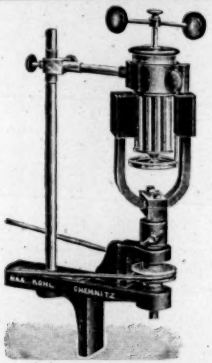
**Physiker,**

Dr. phil. et med., 27 J., mehrjährige wissenschaftliche Tätigkeit auf dem Gebiet der physikalischen Chemie, sucht Stellung in Fabriklaboratorium oder Forschungsinstitut. Offerten unter **S. H. 610** an den Verlag der Physikalischen Zeitschrift (S. Hirzel), Leipzig, Königstraße 2.

Für die Schriftleitung verantwortlich Dr. Erich Hückel in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

# Max Kohl A.G. Chemnitz

Volleingezahltes Kapital Mk. 2400000.




52068. Modell eines Kurzschlussankers nach Friedr. C. G. Müller, für die Schwungmaschine.

## Physikalische Apparate

Funken-Induktoren

Ölluftpumpen

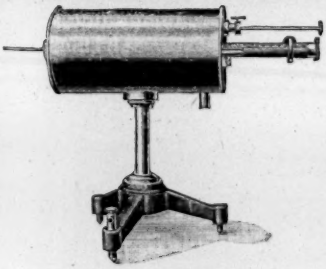
Experimentier-Schalttafeln

Projektions-Apparate

Laboratorienmöbel

In gediegener Ausführung.

Weltausstellung Brüssel 1910: 4 Grosse Preise; Turin 1911: 2 Grosse Preise; Dresden 1911: Grosser Preis.



Apparate für luftelektrische und radioaktive Untersuchungen.
Normalbatterie für elektrostatische Messungen.
Kondensatoren, Mikrowage.
Erdbebenregistrierapparate.

**Spindler & Hoyer G.m.b.H.**
**Mechan. u. opt. Werkstätten**
**Göttingen 3.**

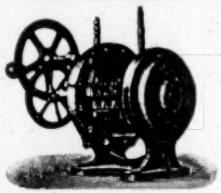
# CARL LEISS
**OPTISCHE ANSTALT**
**BERLIN-STEGLITZ**
STUBENRAUCH-PLATZ 1

**Spektroskope**
**Spektral-Apparate**
mit Wellenlängentrommel (D.R.G.M.)
**Monochromatoren**
mit Wellenlängentrommel (D.R.G.M.)
**Neuer Ultraviolett-Monochromator** (D.R.G.M.)
**Neue Universal-Monochromatoren**
**Ultra-Rot-Spektrometer**
**Spektrographen**
mit Glas- und Quarz-Optik
**Gitter-Spektrographen**
mit Glas- und Quarzgitter
**Spektrometer und Refraktometer**
**Polarisations-Spektrometer**
**Interferenz-Spektroskop**
**Phosphoroskop nach Lenard**

# Arthur Pfeiffer, Wetzlar

Gegründet 1890

Fabrik physikalischer, chemischer und technischer Apparate

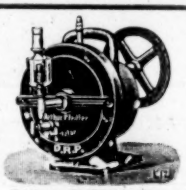


Rotier. Quecksilber-Hochvakuumpumpe System Pfeiffer. D. R. P.

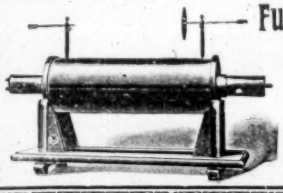
## Spezialfabrik für Hochvakuumpumpen

zu wissenschaftlichen und technischen Zwecken

Alle Arten Luftpumpen, Kolben-Ölluftpumpen, rotierende Ölluftpumpen, rotierende Quecksilberluftpumpen für Betrieb und Laboratorium



Rotierende Quecksilber-Hochvakuumpumpe System Gaede. D. R. P.



## Funkeninduktoren bis 1000 mm Funkenlänge

Normaltypen von 6—1000 mm Funkenlänge mit Unterbrechern aller Art

Spezial-Funkeninduktoren für technische und wissenschaftliche Zwecke

Listen kostenlos von Abteilung E verlangen.

# E. Leybold's Nachfolger

Cöln a/Rhein

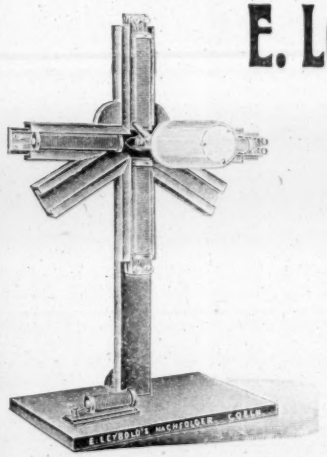
## Fabrik physikalischer Apparate

Zweigniederlassung:

Berlin NW 7, Dorotheenstraße 53

Projektionsapparate für Diaskopie und Episkopie

Hochvakuumpumpen nach Gaede



*Universalstativ für Braun'sche Röhre nach Simon und Reich.*

*Katalog, enthaltend 16000 Nummern, wird Instituten auf Wunsch übersandt.*


Für den Anzeigenteil verantwortlich S. Hirzel in Leipzig. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.